

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：1985 年

試験時間：120 分

問題数：5 問

配点：150 点

第 1 問

実数 p, q ($q > 0$) に対して, 下の 2 条件 (1), (2) を満たす三角形 ABC が存在するための必要十分条件を求めよ.

(1) $|\overrightarrow{BC}| = q$

(2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = p$

ただし, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の内積をあらわす.

第 2 問

平面上の 3 点 A, B, C と 1 次変換 f について, 下の 3 条件 (1), (2), (3) を仮定する.

- (1) A, B, C は同一直線上にはなく, また原点 O は三角形 ABC の内部には属さない.
- (2) 3 点 A, B, C の f による像は, 全体として, 3 点 A, B, C に一致する, すなわち
$$\{f(A), f(B), f(C)\} = \{A, B, C\}$$
- (3) f は恒等変換ではない, すなわち $f \neq E$

このとき, 3 点 A, B, C のうち f によって動かないものは, 1 つあって, 1 つに限ることを示せ.

第 3 問

b, c は実数とし, $x^2 + 2bx + c = 0$ の 2 根を α, β とする.

- (1) $b^2 - c < 0, b \neq 0$ とすれば, いかなる複素数 γ に対しても $\gamma = t\alpha + u\beta$ となる実数 t, u が存在することを示せ.
- (2) $f(x) = x^2 + 2(b-1)x + 5 - c$ とおくとき, 次の条件 (*) を満たす点 (b, c) 全体の集合 D を決定し, 図示せよ.

(*) t, u がともに実数なら, $f(t\alpha + u\beta) \neq 0$

第 4 問

$f(x)$ は多項式で、曲線 $y = f(x)$ の点 $P_1(x_1, f(x_1))$ における接線は点 $P_2(x_2, f(x_2))$ における接線に一致し、その共通接線の方程式を $y = g(x)$ とする。ただし、 $x_1 \neq x_2$ 。

- (1) このとき、多項式 $f(x) - g(x)$ は $(x - x_i)^2$ で割り切れる ($i = 1, 2$)。その理由を、微係数および接線の定義に即して述べよ。
- (2) $f(x)$ が 4 次式で、 x^4 の係数は 1、 x^3 の係数は 0 であるとき、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積 S を x_1 を用いてあらわせ。

第 5 問

正六角形の頂点を反時計まわりの順に, $A_0, A_1, \dots, A_5$ とし, 次のルール (1), (2), (3) に従ってゲームを行う.

- (1) A_0 を出発点とする.
- (2) コインを投げ, 表が出たら反時計まわりに隣の頂点に移動し, 裏が出たら, 時計まわりに隣の頂点に移動する.
- (3) A_0 の反対側の頂点 A_3 に到達したらゲームは終了する.

整数 n ($n \geq 0$) に対して,

$p_n = (2n + 1)$ 回コインを投げ移動を行ってもゲームの終了しない確率

$q_n =$ ちょうど $(2n + 1)$ 回目の移動によってゲームの終了する確率

とする. コインを投げたとき, 表裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ ずつである. p_n および q_n を求めよ.