入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

京都大学（文系）

対象年度： 1984 年

試験時間： 120 分

問題数： 5 問

配点： 150 点

第　1　問

方程式 $xy=1$ によって与えられる双曲線を C とし，また次のように，行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって定義される 1 次変換を f とする．

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1 次変換 f が双曲線 C を C 自身の上へ写すための（a，b，c，d についての）必要十分条件を求めよ．

第　2　問

定数 c（$c \fallingdotseq 0$）に対して，等式 $f(x+c)=f(x)$ がすべての x について成り立つとき，関数 $f(x)$ は周期関数であるといい，またこの等式を満たすような正の数 c のうちの最小値を，$f(x)$ の周期という．次の関数は周期関数であることを示し，またその周期を求めよ．

(1)　$f(x)=2^{\sin x}$

(2)　$f(x)=\sin(\sin x)$

第　3　問

実数 t の値によって定まる点 $\mathrm{P}\,(t+1,\ t)$ と $\mathrm{Q}\,(t-1,\ -t)$ がある．

　t が区間 $[0,1]=\{t \mid 0 \leqq t \leqq 1\}$ を動くとき，線分 PQ が通過する範囲の面積を求めよ．

第　4　問

$f(x)$ と $g(x)$ はいずれも x の整式で，次の条件を満たしているとする．

（イ）　$f(x) = \{g(x)\}^2 + a$（ただし a はある実数．）

（ロ）　$g'(x) = x + 1$（ただし $g'(x)$ は $g(x)$ の導関数を表す．）

（ハ）　$f(-1) = f(1) = 0$

実数 k を定数とするとき，$y = f(x)$ のグラフと $y = g(x) + k$ のグラフとの（k の値によって変わる）交点の個数を求めよ．

第 5 問

つぼの中に r 個（$r \geqq 1$）の赤球と，s 個（$s \geqq 0$）の白球が入っている．A と B の 2 人が，交互に球を 1 個ずつとり出し，先に赤球をとり出した者を勝者とするゲームをする．ただし，とり出した球は，もとにもどさないものとする．

(1) ちょうど i 回目（すなわち A，B 2 人のとり出した球の合計が，ちょうど i 個になった時）に勝者がきまる確率を P_i とするとき，$P_i \geqq P_{i+1}$（$i = 1, 2, \cdots$）となることを示せ．

(2) このゲームを A からはじめるとする．任意の r，s に対して，A が勝者となる確率は，$\dfrac{1}{2}$ またはそれ以上であることを示せ．