

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：1983年

試験時間：120分

問題数：5問

配点：150点

第 1 問

数直線上を原点から右（正の向き）に硬貨を投げて進む．表が出れば 1 進み，裏が出れば 2 進むものとする．このようにして，ちょうど点 n に到達する確率を p_n で表す．ただし， n は自然数とする．

(1) 3 以上の n について， p_n と p_{n-1} ， p_{n-2} との関係式を求めよ．

(2) p_n ($n \geq 3$) を求めよ．

第 2 問

$\angle A = 90^\circ$ である直角三角形 ABC がある．頂点 B, C をそれぞれ始点として，辺 BC に垂直な半直線 l, m を頂点 A のある側にひく．つぎに辺 BC 上の任意の点 P より AB, AC に垂線をひき，この延長が l, m と交わる点をそれぞれ Q, R とする．

- (1) 3 点 Q, A, R は一直線上にあることを示せ．
- (2) 台形 $BCRQ$ の面積が三角形 ABC の面積の 2 倍になるとき，この台形の形を求めよ．ただし， $AB \neq AC$ とする．

第 3 問

$ab + cd = 0$, $ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d のつくる行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ がある.

ただし, a, c は負ではないとする.

(1) $A = \begin{pmatrix} v \cos \theta & -v \sin \theta \\ v \sin \theta & v \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ と表されることを示せ. ただし, u, v, θ は実数で, $v > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする.

(2) O を原点とする座標平面上の 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について, 長さ 1 のベクトル $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ から, ベクトル $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ への角度を γ ($-\pi < \gamma \leq \pi$) とする (したがって, 半直線 OP を角度 γ だけ回転すれば半直線 OP' となる). (x, y) が $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 1$ の範囲を動いたとき, γ を最大にする $\overrightarrow{OP}$ を求めよ. ただし, $0 < u < 1$ とする.

第 4 問

3つのベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ はたがいに直交している. 点 O より直線 BC, CA, AB に垂線をひき, その交点をそれぞれ P, Q, R とする.

- (1) 四面体 OPQR の四面体 OABC に対する体積比を, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ の長さ a , b , c で表せ.
- (2) 四面体 OPQR の体積は四面体 OABC の体積の $\frac{1}{4}$ 以下であることを示せ.

第 5 問

$f(x)$ は x の整式で, $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(x) = 2(1 - x)$ を満たすとする ($f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す).

- (1) $f(x)$ を求めよ.
- (2) $y = f(x)$ のグラフの $x \geq 0$ の部分を C とする. また, 点 $(-1, 0)$ を通る C の接線で傾きが 0 でないものを T とする. このとき, x 軸の負の部分と, C , T とで囲まれた領域の面積を求めよ.