

1983年度入学試験問題

数 学 (文系)

150 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で5題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

数直線上を原点から右（正の向き）に硬貨を投げて進む．表が出れば1進み，裏が出れば2進むものとする．このようにして，ちょうど点 n に到達する確率を p_n で表す．ただし， n は自然数とする．

- (1) 3以上の n について， p_n と p_{n-1} ， p_{n-2} との関係式を求めよ．
- (2) p_n ($n \geq 3$) を求めよ．

2

(30 点)

$\angle A = 90^\circ$ である直角三角形 ABC がある．頂点 B ， C をそれぞれ始点として，辺 BC に垂直な半直線 l ， m を頂点 A のある側にひく．つぎに辺 BC 上の任意の点 P より AB ， AC に垂線をひき，この延長が l ， m と交わる点をそれぞれ Q ， R とする．

- (1) 3点 Q ， A ， R は一直線上にあることを示せ．
- (2) 台形 $BCRQ$ の面積が三角形 ABC の面積の2倍になるとき，この台形の形を求めよ．ただし， $AB \neq AC$ とする．

3

(30 点)

$ab + cd = 0$, $ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d のつくる行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が

ある. ただし, a, c は負ではないとする.

(1) $A = \begin{pmatrix} v \cos \theta & -v \sin \theta \\ v \sin \theta & v \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ と表されることを示せ. ただし, u, v, θ は実数で, $v > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする.

(2) O を原点とする座標平面上の 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について, 長さ 1 のベ

クトル $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ から, ベクトル $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ への角度を γ ($-\pi < \gamma \leq \pi$)

とする (したがって, 半直線 OP を角度 γ だけ回転すれば半直線 OP' となる).

(x, y) が $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 1$ の範囲を動いたとき, γ を最大にする $\overrightarrow{OP}$ を求めよ. ただし, $0 < u < 1$ とする.

4

(30 点)

3 つのベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ はたがいに直交している. 点 O より直線 BC, CA, AB に垂線をひき, その交点をそれぞれ P, Q, R とする.

(1) 四面体 $OPQR$ の四面体 $OABC$ に対する体積比を, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ の長さ a, b, c で表せ.

(2) 四面体 $OPQR$ の体積は四面体 $OABC$ の体積の $\frac{1}{4}$ 以下であることを示せ.

$f(x)$ は x の整式で, $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(x) = 2(1 - x)$ を満たすとする ($f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す).

- (1) $f(x)$ を求めよ.
- (2) $y = f(x)$ のグラフの $x \geq 0$ の部分を C とする. また, 点 $(-1, 0)$ を通る C の接線で傾きが 0 でないものを T とする. このとき, x 軸の負の部分と, C , T とで囲まれた領域の面積を求めよ.

問題は, このページで終わりである。

