

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：1981年

試験時間：120分

問題数：5問

配点：150点

第 1 問

座標平面上に、原点と異なる 3 点 A, B, C を考える. A は x 軸上にあり, B は y 軸上にあるものとする. O を原点とすると, 1 次変換 f が $f(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB}$, $f(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OC}$, $f(\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA}$ をみたすものとする. このとき, 次の (1), (2) が成り立つことを示せ.

(1) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

(2) $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$ するとき, 平面上の点 P で, $\overrightarrow{OP}$ と $f(\overrightarrow{OP})$ とが直交するならば, 点 P は x 軸上にある. ただし, $|\quad|$ はベクトルの大きさを表す.

第 2 問

p を有理数とし、次の関係をもつ x_n, y_n を座標にもつ平面上の点 P_n ($n = 1, 2, \dots$) を考える；

$$x_{n+1} = x_n + p(y_{n+1} + y_n), \quad y_{n+1} = y_n - p(x_{n+1} + x_n)$$

いま、 x_1, y_1 がともに有理数で、かつ P_1 は原点ではないとする。このとき、すべての x_n, y_n は有理数であり、点 P_n は原点を中心とする定円上にあることを示せ。

第 3 問

a を正の定数とする．放物線 $C_a : y = x^2 - a^2$ 上の点 P から放物線 $C : y = x^2$ に引いた 2 本の接線の接点を Q, R とするとき，線分 QR と C とで囲まれた部分の面積は， P の取り方に無関係であることを示せ．

第 4 問

6 人が円陣を作ってすわり、次のゲームをする；

- (i) 最初、交互に赤と白の帽子をかぶり、隣り合う 2 人ずつの 3 つの組を作る．各組でジャンケンをし、負けた人は勝った人と同色の帽子をかぶる．
- (ii) 6 人が同色の帽子にならない場合、隣り合う異なる色の帽子をかぶった 2 人ずつが組を作り、各組でジャンケンをし、負けた人は勝った人と同色の帽子をかぶる．
(両隣りが自分と同色の帽子の人はジャンケンをしない．)
- (iii) ゲームは、6 人の帽子が同色になれば終了とし、それまで何回か (ii) を繰り返す．

このとき、 n 回までにゲームが終了する確率を求めよ．ただし、ジャンケンでは一方が勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で勝負がつくものとする．

第 5 問

- (1) 四面体 PQRS が, $\angle PQR = \angle RQS = \angle SQP = 90^\circ$ および $PR = PS = a$ (定数) をみたすとき, このような四面体の体積の最大値を求めよ.
- (2) 四面体 ABCD が, $AB = BC = CD = DA = a$ (定数) をみたすとき, このような四面体の体積の最大値を求めよ.