

1981年度入学試験問題

数 学 (文系)

150 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で5題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

座標平面上に、原点と異なる 3 点 A, B, C を考える. A は x 軸上にあり, B は y 軸上にあるものとする. O を原点とすると, 1 次変換 f が $f(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB}$, $f(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OC}$, $f(\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA}$ をみたすものとする. このとき, 次の (1), (2) が成り立つことを示せ.

$$(1) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

(2) $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$ するとき, 平面上の点 P で, $\overrightarrow{OP}$ と $f(\overrightarrow{OP})$ とが直交するならば, 点 P は x 軸上にある. ただし, $|\quad|$ はベクトルの大きさを表す.

2

(30 点)

p を有理数とし, 次の関係をもつ x_n, y_n を座標にもつ平面上の点 P_n ($n = 1, 2, \dots$) を考える;

$$x_{n+1} = x_n + p(y_{n+1} + y_n), \quad y_{n+1} = y_n - p(x_{n+1} + x_n)$$

いま, x_1, y_1 がともに有理数で, かつ P_1 は原点ではないとする. このとき, すべての x_n, y_n は有理数であり, 点 P_n は原点を中心とする定円上にあることを示せ.

3

(30 点)

a を正の定数とする. 放物線 $C_a: y = x^2 - a^2$ 上の点 P から放物線 $C: y = x^2$ に引いた 2 本の接線の接点を Q, R とするとき, 線分 QR と C とで囲まれた部分の面積は, P の取り方に無関係であることを示せ.

4

(30 点)

6 人が円陣を作ってすわり、次のゲームをする；

- (i) 最初、交互に赤と白の帽子をかぶり、隣り合う 2 人ずつの 3 つの組を作る．各組でジャンケンをし、負けた人は勝った人と同色の帽子をかぶる．
- (ii) 6 人が同色の帽子にならない場合、隣り合う異なる色の帽子をかぶった 2 人ずつが組を作り、各組でジャンケンをし、負けた人は勝った人と同色の帽子をかぶる．（両隣りが自分と同色の帽子の人はジャンケンをしない．）
- (iii) ゲームは、6 人の帽子が同色になれば終了とし、それまで何回か (ii) を繰り返す．

このとき、 n 回までにゲームが終了する確率を求めよ．ただし、ジャンケンでは一方が勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で勝負がつくものとする．

5

(30 点)

- (1) 四面体 PQRS が、 $\angle PQR = \angle RQS = \angle SQP = 90^\circ$ および $PR = PS = a$ （定数）をみたすとき、このような四面体の体積の最大値を求めよ．
- (2) 四面体 ABCD が、 $AB = BC = CD = DA = a$ （定数）をみたすとき、このような四面体の体積の最大値を求めよ．

問題は、このページで終わりである。

