

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：1978年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

a, b, c を正の数とすると、不等式

$$2\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right) \leq 3\left(\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc}\right)$$

を証明せよ。また、等号が成立するのはどんな場合か。

第 2 問

$\triangle OAB$ の重心 G を通る直線が、辺 OA , OB とそれぞれ辺上の点 P , Q で交わっているとする. $\overrightarrow{OP} = h\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OB}$ とし, $\triangle OAB$, $\triangle OPQ$ の面積をそれぞれ S , T とすれば, 次の関係が成り立つことを示せ.

$$(1) \quad \frac{1}{h} + \frac{1}{k} = 3$$

$$(2) \quad \frac{4}{9}S \leq T \leq \frac{1}{2}S$$

第 3 問

放物線 $y = 4 - x^2$ と直線 $y = 3x$ との 2 交点を A, B とする. 点 P は放物線の弧の上を A から B まで動くものとし, $\triangle PAB$ の面積が最大となるときの P の座標を (p, q) とする.

- (1) p を求めよ.
- (2) 線分 AB に平行な直線が放物線と 2 点 C, D で交わる時, 線分 CD は直線 $x = p$ によって二等分されることを示せ.
- (3) 放物線と線分 AB によって囲まれる図形は, 直線 $x = p$ によって, 互いに面積の等しい二つの部分に分けられることを示せ.

第 4 問

角 θ の回転を表わす行列を $R(\theta)$ とする. すなわち

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

とする. 2 次正方行列 X で, $X^3 = R(\theta)$ をみたすものはどれだけあるかを考えたい.

- (1) 行列 X が $X^3 = R(\theta)$ をみたせば, X は逆行列をもち, かつ $R(\theta)X = XR(\theta)$ が成立することを示せ.
- (2) 行列 X が, ある角 α の回転を表わす行列 $R(\alpha)$ と, 左上が正, 左下が 0 であるような行列 T との積であるとする. すなわち $X = R(\alpha)T$, ただし

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad a > 0$$

とする. このとき, もし X が $R(\theta)X = XR(\theta)$ をみたし, さらに θ が π の整数倍でなければ, $a = c$, $b = 0$ であることを示せ.

- (3) 一般に, 逆行列をもつ任意の行列 X は, ある角 α の回転を表わす行列 $R(\alpha)$ と, 左上が正, 左下が 0 であるような行列 T との積 $X = R(\alpha)T$ として表わされる. 行列に対応する 1 次変換を考えることによって, このことを示せ.
- (4) $X^3 = R(\theta)$ をみたす行列 X は, θ が π の整数倍でなければ, ちょうど 3 個存在し, θ が π の整数倍ならば, 無限に多く存在することを示せ.

第 5 問

$f(x)$ は実数を係数とする x の多項式とする.

- (1) すべての整数 k について, $f(k)$ が整数であるための必要十分条件は, $f(0)$ が整数であって, すべての整数 k について, $f(k) - f(k-1)$ が整数となることである. これを証明せよ.
- (2) $f(x) = ax^2 + bx + c$ のとき, すべての整数 k について, $f(k)$ が整数となるために, 係数 a, b, c がみたすべき必要十分条件を求めよ.

第 6 問

数 0 または 1 を n 個並べて得られる数列 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ($a_i = 0$ または 1) を考える. これに対して, 新しい数列 $A' = \{a'_1, a'_2, \dots, a'_n\}$ ($a'_i = 0$ または 1) を次のように定める:

n 角形の頂点に, $a_1, a_2, \dots, a_n$ をこの順に並べたとき, a_i の両隣が等しければ (すなわち $a_{i-1} = a_{i+1}$ ならば), $a'_i = 0$, a_i の両隣が異なれば (すなわち $a_{i-1} \neq a_{i+1}$ ならば), $a'_i = 1$ と定める ($i = 1, 2, \dots, n$, ただし $a_0 = a_n$, $a_{n+1} = a_1$ と見なす).

このとき, $n \geq 3$ として, $A = A'$ (すなわち $a_i = a'_i$, $i = 1, 2, \dots, n$) となるような数列 A をすべて求めよ.