

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：1976年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

- (1) 多項式 $f(x) = x^n$ が、区間 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ において不等式 $|f(x)| < \frac{1}{1000}$ をみたすためには、 n をどのようにとればよいか。
- (2) 最高次の係数が 1 である多項式 $g(x)$ で、区間 $0 \leq x \leq 1$ において不等式 $|g(x)| < \frac{1}{1000}$ をみたし、さらに $10000 < |g(3)| < 100000$ であるようなものの例を 1 つあげよ。

第 2 問

1 つの平面内にある, いくつかの $\vec{0}$ でないベクトルからなる集合 S が条件

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \text{ が } S \text{ のベクトルであれば } \frac{2(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{b}, \vec{b})} \text{ は整数である}$$

をみたしているという. ただし, $(\vec{a}, \vec{b})$ 等はベクトルの内積をあらわす.

- (1) S の 2 つのベクトルの間の角は, $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ およびこれらの補角のうちの 1 つであることを示せ.
- (2) (1) において, 角が $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ の場合には, 2 つのベクトルの長さの比はどうなるか.
- (3) 30° の角をなすベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を含み, 12 個のベクトルからなる集合 S の例を図示し, 各ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}$ であらわせ.

第 3 問

多項式 $f(x)$ で，等式

$$f(x)f'(x) + \int_1^x f(t) dt = \frac{4}{9}x - \frac{4}{9}$$

をみたしているものをすべて求めよ．ただし， $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数をあらわす．

第 4 問

- (1) 点 (x, y) が直線 $y = ax$ の上を動くとき、点 $(2x - y, x - 2y)$ は原点を通る 1 つの直線 l の上を動くことを示せ.
- (2) (1) における 2 つの直線 $y = ax$ と l とが一致するような a の値は 2 つあることを示し、そのような a の値を a_1, a_2 とするとき、2 つの直線 $y = a_1x$ と $y = a_2x$ との間の角を求めよ.

第 5 問

初項 $a_1 = 2$, 第 2 項 $a_2 = 3$ であるような数列で, 一般項 a_n が簡単な式で与えられるものを作りたい. A, B, C, D は n または定数, $*$ は四則演算 ($+$, $-$, $\times$, $\div$) のうちのいずれか, A^n は A の n 乗をあらわすとき,

(1) $a_n = A * B * C * D$ の形の式で与えられる数列

(2) $a_n = A^n * B * C$ の形の式で与えられる数列

で, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ をみたすものをそれぞれ 3 つずつ, 合わせて 6 つの相異なる数列を作れ. ただし, 1 つの式の中の $*$ は異なる四則演算を使ってもよく, $+0$, $\times 1$ 等は省略してよい.

第 6 問

曲線 $y = \alpha x^3 - \beta x$ ($\alpha \neq 0$) の上にある 2 点 P, Q において, この曲線の接線がいずれも線分 PQ と垂直になっているという.

- (1) このような 2 点 P, Q は原点に関して対称な位置にあることを示せ.
- (2) また, このような 2 点 P, Q があるためには (α, β) はどのような範囲になければならないか.