

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：1975 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

配点：200 点

第 1 問

あるスポーツ大会で，参加した n 個のチームはつぎの方法（リーグ戦形式）で順位を争う．すなわち，どのチームも他の各チームとそれぞれ 1 回ずつ試合を行い，勝ち数の大小によって順位をきめるものとする．今年の大会では，引き分けが 1 回も起こらず，また同順位のチームがなかったという．このとき，どのチームもそれより下位のチームには必ず勝っていることを証明せよ．

第 2 問

- (1) $x \geq 0$ のとき $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(x+1)$ を示せ.
- (2) $\int_0^k \sqrt{x} \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k dx < 1$ を示せ (k は自然数).

第 3 問

α, β, γ がこの順に等差数列であり, $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ がこの順に等比数列であるのはどのようなときか.

第 4 問

直角をはさむ 2 つの半直線 OA , OB 上にそれぞれ点 P , Q を, $PQ = 2a$ (a は正の定数) であるようにとる. このとき, $\triangle OPQ$ の面積を最大にするには線分 OP の長さをいくらにすればよいか.

第 5 問

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + a$ とする. x の正の値に対し, つねに $f(x) > 0$ となるのはどのようなときか.

第 6 問

a が実数で $a < 1$ のとき, 数列 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ を $x_0 = a, x_n = \frac{1}{2 - x_{n-1}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定義する. このとき

(1) x_n を n と a で表わせ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(x_n - 1 + \frac{1}{n} \right)$ を求めよ.