1975年度入学試験問題

数　　学　（文系）

200点満点

≪配点は，一般選抜学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに，解答用ページ，計算用ページ，余白ページがある．
3. 問題は全部で6題ある．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと．それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない．ただし，解答用ページに続き方をはっきり示した場合は，見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい．その場合は，解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って，計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．なお，他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること．
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．なお，計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き，計算などは，消さずに残しておいてもよい．
7. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

1

（30 点）

あるスポーツ大会で，参加した n 個のチームはつぎの方法 (リーグ戦形式) で順位を争う．すなわち，どのチームも他の各チームとそれぞれ 1 回ずつ試合を行い，勝ち数の大小によって順位をきめるものとする．今年の大会では，引き分けが 1 回も起こらず，また同順位のチームがなかったという．このとき，どのチームもそれより下位のチームには必ず勝っていることを証明せよ．

2

（35 点）

(1) $x \geqq 0$ のとき $\sqrt{x} \leqq \dfrac{1}{2}(x+1)$ を示せ．

(2) $\displaystyle\int_0^k \sqrt{x}\left(1-\frac{x}{k}\right)^k dx < 1$ を示せ（k は自然数）．

3

（30 点）

α, β, γ がこの順に等差数列であり，$\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ がこの順に等比数列であるのはどのようなときか．

$\boxed{4}$ （30 点）

直角をはさむ 2 つの半直線 OA, OB 上にそれぞれ点 P, Q を，$\mathrm{PQ} = 2a$（a は正の定数）であるようにとる．このとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を最大にするには線分 OP の長さをいくらにすればよいか.

$\boxed{5}$ （30 点）

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + a$ とする．x の正の値に対し，つねに $f(x) > 0$ となるのはどのようなときか.

$\boxed{6}$ （40 点）

a が実数で $a < 1$ のとき，数列 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ を $x_0 = a$，$x_n = \dfrac{1}{2 - x_{n-1}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定義する．このとき

(1) x_n を n と a で表わせ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 \left(x_n - 1 + \frac{1}{n}\right)$ を求めよ.

問題は，このページで終わりである。