

入学試験過去問題

数 学

京都大学（文系）

対象年度：1972年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

2 つまたは 3 つのベクトルの加法について、次の法則が成立する.

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}, \quad (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

いま, n 個のベクトルを $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n$ とし, その順序を任意にかえたものを, $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \dots, \vec{B}_n$ とする. 上の 2 つの法則だけをつかって,

$$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \dots + \vec{A}_n = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n$$

がなりたつことを数学的帰納法を用いて示せ. なお, たとえば 4 つのベクトル $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ について, その和 $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$ は $\{(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}\} + \vec{D}$ を意味するものとし, 一般の場合も同様とする.

第 2 問

実数または複素数の x, y, z, a について, $x + y + z = a$, $x^3 + y^3 + z^3 = a^3$ の 2 式が成立するとき, x, y, z のうち少なくとも 1 つは a に等しいことを示せ.

第 3 問

三角形 ABC の内部の 1 点 P を頂点とする 1 つの平行四辺形を $PQRS$ とする. P から Q へ向かう半直線が三角形 ABC の周と交わる点を Q' とし, R', S' も同様の点とする. $\overrightarrow{PQ} = a\overrightarrow{PQ'}$, $\overrightarrow{PR} = b\overrightarrow{PR'}$, $\overrightarrow{PS} = c\overrightarrow{PS'}$ とおくと, $a + c \geq b$ が成立することを示せ. ($\overrightarrow{PQ}$ などはベクトルを表わす)

第 4 問

3 次方程式 $x^3 - ax^2 + ax - \frac{a^2}{9} = 0$ が相異なる 3 実根をもつために、実の定数 a のみたすべき必要十分条件を求めよ.

第 5 問

a, c を定数, t を媒介変数として次の式で表わされる xy 平面上の曲線がある.

$$\begin{cases} x = ca^t + t & (a > 1) \\ y = ca^t - t & (t \text{ はすべての実数値をとる}) \end{cases}$$

- (1) $c = 1$ のとき, この曲線の概形をえがけ. (座標軸を回転して考えよ)
- (2) 平面上のどのような点 (p, q) をあたえても, c を適当にえらべば, 上の曲線はこの点 (p, q) を通ることを示せ.

第 6 問

$9u_{n+1} = (10 - u_n^2)u_n$ ($n = 1, 2, \dots$) で定められる数列 $\{u_n\}$ がある. いま, $0 < u_1 < \frac{3}{2}$ と仮定するとき次のことを示せ.

- (1) すべての n について, $0 < u_n < \frac{3}{2}$.
- (2) $u_1 > u_2$ ならばすべての n について $u_n > u_{n+1}$, $u_1 < u_2$ ならばすべての n について $u_n < u_{n+1}$.