1972年度入学試験問題

数　　学　（文系）

200点満点

≪配点は，一般選抜学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに，解答用ページ，計算用ページ，余白ページがある．
3. 問題は全部で6題ある．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと．それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない．ただし，解答用ページに続き方をはっきり示した場合は，見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい．その場合は，解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って，計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．なお，他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること．
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．なお，計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き，計算などは，消さずに残しておいてもよい．
7. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

1

（35 点）

2 つまたは 3 つのベクトルの加法について，次の法則が成立する．

$$\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}=\overrightarrow{B}+\overrightarrow{A},\quad (\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B})+\overrightarrow{C}=\overrightarrow{A}+(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C})$$

いま，n 個のベクトルを $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \cdots, \overrightarrow{A_n}$ とし，その順序を任意にかえたものを，$\overrightarrow{B_1}, \overrightarrow{B_2}, \cdots, \overrightarrow{B_n}$ とする．上の 2 つの法則だけをつかって，

$$\overrightarrow{A_1}+\overrightarrow{A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_n}=\overrightarrow{B_1}+\overrightarrow{B_2}+\cdots+\overrightarrow{B_n}$$

がなりたつことを数学的帰納法を用いて示せ．なお，たとえば 4 つのベクトル $\overrightarrow{A}$，$\overrightarrow{B}$，$\overrightarrow{C}$，$\overrightarrow{D}$ について，その和 $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}+\overrightarrow{D}$ は $\{(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B})+\overrightarrow{C}\}+\overrightarrow{D}$ を意味するものとし，一般の場合も同様とする．

2

（35 点）

実数または複素数の x，y，z，a について，$x+y+z=a$，$x^3+y^3+z^3=a^3$ の 2 式が成立するとき，x，y，z のうち少なくとも 1 つは a に等しいことを示せ．

3

（35 点）

三角形 ABC の内部の 1 点 P を頂点とする 1 つの平行四辺形を PQRS とする．P から Q へ向かう半直線が三角形 ABC の周と交わる点を Q′ とし，R′，S′ も同様の点とする．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=a\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=b\overrightarrow{\mathrm{PR'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=c\overrightarrow{\mathrm{PS'}}$ とおくとき，$a+c \geqq b$ が成立することを示せ．（$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ などはベクトルを表わす）

4

（30 点）

3 次方程式 $x^3 - ax^2 + ax - \dfrac{a^2}{9} = 0$ が相異なる 3 実根をもつために，実の定数 a のみたすべき必要十分条件を求めよ．

5

（30 点）

a，c を定数，t を媒介変数として次の式で表わされる xy 平面上の曲線がある．

$$\begin{cases} x = ca^t + t & (a > 1) \\ y = ca^t - t & (t \text{ はすべての実数値をとる}) \end{cases}$$

(1) $c = 1$ のとき，この曲線の概形をえがけ．（座標軸を回転して考えよ）

(2) 平面上のどのような点 $(p,\ q)$ をあたえても，c を適当にえらべば，上の曲線はこの点 $(p,\ q)$ を通ることを示せ．

6

（30 点）

$9u_{n+1} = (10 - {u_n}^2)u_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で定められる数列 $\{u_n\}$ がある．いま，$0 < u_1 < \dfrac{3}{2}$ と仮定するとき次のことを示せ．

(1) すべての n について，$0 < u_n < \dfrac{3}{2}$.

(2) $u_1 > u_2$ ならばすべての n について $u_n > u_{n+1}$，$u_1 < u_2$ ならばすべての n について $u_n < u_{n+1}$.

問題は，このページで終わりである。