

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系・甲）

対象年度：2010年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

1 から 5 までの自然数を 1 列に並べる．どの並べかたも同様の確からしさで起こるものとする．このとき 1 番目と 2 番目と 3 番目の数の和と，3 番目と 4 番目と 5 番目の数の和が等しくなる確率を求めよ．ただし，各並べかたにおいて，それぞれの数字は重複なく 1 度ずつ用いるものとする．

第 2 問

四面体 ABCD において $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA}$ と $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ はそれぞれ垂直であるとする. このとき, 頂点 A, 頂点 B および辺 CD の中点 M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することを示せ.

第 3 問

x を正の実数とする．座標平面上の 3 点 $A(0, 1)$, $B(0, 2)$, $P(x, x)$ をとり， $\triangle APB$ を考える． x の値が変化するとき， $\angle APB$ の最大値を求めよ．

第 4 問

数列 $\{a_n\}$ は, すべての正の整数 n に対して $0 \leq 3a_n \leq \sum_{k=1}^n a_k$ を満たしているとする.
このとき, すべての n に対して $a_n = 0$ であることを示せ.

第 5 問

a を正の実数とする．座標平面において曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし，曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)，曲線 $y = a \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする．このとき $S : T = 3 : 1$ となるような a の値を求めよ．

第 6 問

座標空間内で， $O(0, 0, 0)$ ， $A(1, 0, 0)$ ， $B(1, 1, 0)$ ， $C(0, 1, 0)$ ， $D(0, 0, 1)$ ， $E(1, 0, 1)$ ， $F(1, 1, 1)$ ， $G(0, 1, 1)$ を頂点に持つ立方体を考える．この立方体を対角線 OF を軸にして回転させて得られる回転体の体積を求めよ．