2009年度入学試験問題

数　学　（理系甲）

200点満点

≪配点は，一般選抜学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに，解答用ページ，計算用ページ，余白ページがある．
3. 問題は全部で6題ある．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと．それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない．ただし，解答用ページに続き方をはっきり示した場合は，見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい．その場合は，解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って，計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．なお，他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること．
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．なお，計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き，計算などは，消さずに残しておいてもよい．
7. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

1

（30 点）

次の各問にそれぞれ答えよ．

(1) 正の数 a に対して xyz 空間で $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(3,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ 0,\ a)$，$\mathrm{E}(3,\ 0,\ a)$，$\mathrm{F}(3,\ 2,\ a)$，$\mathrm{G}(0,\ 2,\ a)$ を頂点とする直方体 $\mathrm{OABC-DEFG}$ を考える．D を通り，3 つの頂点 O，E，G を含む平面に垂直な直線が辺 BC（両端を含む）と点 P で交わるとき，a の値と P の座標を求めよ．

(2) 白球と赤球の入った袋から 2 個の球を同時に取り出すゲームを考える．取り出した 2 球がともに白球ならば「成功」でゲームを終了し，そうでないときは「失敗」とし，取り出した 2 球に赤球を 1 個加えた 3 個の球を袋にもどしてゲームを続けるものとする．最初に白球が 2 個，赤球が 1 個袋に入っていたとき，$n-1$ 回まで失敗し n 回目に成功する確率を求めよ．ただし $n \geqq 2$ とする．

2

（35 点）

平面上に三角形 $\triangle \mathrm{OA_1A_2}$ と点 $\mathrm{A_3}$，$\mathrm{A_4}$，$\mathrm{A_5}$ を，$n=1,\ 2,\ 3$ に対して $\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ と $\triangle \mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}$ が辺 OA_{n+1} に関して対称になるようにとる．$\triangle \mathrm{OA_2A_5}$ の面積が $\triangle \mathrm{OA_1A_2}$ の面積の正の整数倍となるとき，$\angle \mathrm{A_1OA_2}$ の値を求めよ．

3

（30 点）

x，y は $x \neq 1$，$y \neq 1$ をみたす正の数で，不等式

$$\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2)$$

をみたすとする．このとき x，y の組 $(x,\ y)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．

$\boxed{4}$ （35 点）

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を $ad - bc = 1$ をみたす行列（a，b，c，d は実数）とし，正の整数 n に対して

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

により x_n, y_n を定める．$x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2 = 1$ ならばすべての n に対して $x_n^2 + y_n^2 = 1$ であることを示せ.

$\boxed{5}$ （35 点）

p を素数，n を正の整数とするとき，$(p^n)!$ は p で何回割り切れるか.

$\boxed{6}$ （35 点）

極方程式 $r = 1 + \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ で表される曲線の長さを求めよ.

問題は，このページで終わりである。