

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系・甲）

対象年度：2010年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

直線 $y = px + q$ が関数 $y = \log x$ のグラフと共有点を持たないために p と q が満たすべき必要十分条件を求めよ.

第 2 問

正四面体 $ABCD$ を考える. 点 P は時刻 0 では頂点 A に位置し, 1 秒ごとにある頂点から他の 3 頂点のいずれかに, 等しい確率で動くとする. このとき, 時刻 0 から時刻 n までの間に, 4 頂点 A, B, C, D のすべてに点 P が現れる確率を求めよ. ただし n は 1 以上の整数とする.

第 3 問

$AB = AC$ である二等辺三角形 ABC を考える．辺 AB の中点を M とし，辺 AB を延長した直線上に点 N を， $AN : NB = 2 : 1$ となるようにとる．このとき $\angle BCM = \angle BCN$ となることを示せ．ただし，点 N は辺 AB 上にはないものとする．

第 4 問

定数 a は実数であるとする. 方程式

$$(x^2 + ax + 1)(3x^2 + ax - 3) = 0$$

を満たす実数 x はいくつあるか. a の値によって分類せよ.

第 5 問

次の式で与えられる底面の半径が 2, 高さが 1 の円柱 C を考える.

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq z \leq 1\}$$

xy 平面上の直線 $y = 1$ を含み, xy 平面と 45° の角をなす平面のうち, 点 $(0, 2, 1)$ を通るものを H とする. 円柱 C を平面 H で二つに分けるときの, 点 $(0, 2, 0)$ を含む方の体積を求めよ.

第 6 問

空間内に原点 O を中心とし半径 1 の球面 S を考え、 S 上の 2 点を $A\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とする. $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ で与えられる平面を S で切った切り口の円において、 A と B を結ぶ弧のうち短い方の長さを l_1 とする. また 3 点 O, A, B を通る平面で S を切った切り口の円において、 A と B を結ぶ弧のうち短い方の長さを l_2 とする. このとき $l_1 > l_2$ を証明せよ.