

京都大学（理系） 2022 年 第 5 問

曲線 $C: y = \cos^3 x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$), x 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を S とする. $0 < t < \frac{\pi}{2}$ とし, C 上の点 $Q(t, \cos^3 t)$ と原点 O , および $P(t, 0)$, $R(0, \cos^3 t)$ を頂点にもつ長方形 $OPQR$ の面積を $f(t)$ とする. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) S を求めよ.

(2) $f(t)$ は最大値をただ 1 つの t でとることを示せ. そのときの t を α とすると,

$$f(\alpha) = \frac{\cos^4 \alpha}{3 \sin \alpha}$$
 であることを示せ.

(3) $\frac{f(\alpha)}{S} < \frac{9}{16}$ を示せ.