

京都大学（理系） 1996 年 第 5 問

xy 平面上の正三角形 $\triangle ABC$ を考える． $\triangle ABC$ の重心は原点 O にあり，ベクトル $\overrightarrow{OA}$ の長さは 1 とする． $\triangle ABC$ の内部または辺上の点 P_0 に対し，3 頂点 A, B, C から 1 点を等確率 $\frac{1}{3}$ で選び，この頂点と P_0 の中点を P_1 とする．次に点 P_1 に対して同様の操作を行い得られた点を P_2 とし，以下この操作を繰り返して，点 $P_3, P_4, \dots, P_n$ を作る．ベクトル $\overrightarrow{OP_n}$ の長さの 2 乗 $|\overrightarrow{OP_n}|^2$ の期待値を E_n とおく．

- (1) E_1 をベクトル $\overrightarrow{OP_0}$ の長さを用いて表せ．
- (2) 選んだ頂点が $X_1, X_2, \dots, X_n$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{OP_n}$ をベクトル $\overrightarrow{OP_0}$ と $\overrightarrow{OX_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, を用いて表せ．
- (3) P_0 が原点 O のとき， E_n を求めよ．