

京都大学（理系） 1996 年 第 4 問

与えられた自然数  $k$  に対し、数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = 0, \quad a_n = \left[ \frac{a_{n-1} + k}{3} \right] \quad (n \geq 2)$$

によって定める．ただし実数  $t$  に対し  $[t]$  は  $t$  を超えない最大の整数を表す．

(1)  $k = 8$  および  $k = 9$  のとき、数列  $\{a_n\}$  を求めよ．

(2) すべての自然数  $n$  に対し、次の 2 つの不等式

$$a_n \leq \frac{k-1}{2}, \quad a_n \leq a_{n+1}$$

が成り立つことを示せ．

(3)  $a_n = a_{n+1}$  ならば、 $n$  以上のすべての整数  $m$  に対し  $a_n = a_m$  であることを示し、このときの  $a_n$  の値を求めよ．