

京都大学（理系） 1991 年 第 6 問

関数 $y = f(x)$ ($x \geq 0$) は次の条件 (イ), (ロ) を満たしている.

(イ) $f(x)$ は微分可能で $f'(x)$ は連続, かつ $f(x) > 0$.

(ロ) 正の定数 a があって

$$\int_0^x (f(t))^{-a} dt = \int_a^{f(x)} \left(e^{-\frac{t^2}{2}} + t^{-a} \right) dt$$

(1) (ロ) の等式の両辺を x について微分して得られる (y の満たす) 微分方程式を書け. また $f(0)$ の値を求めよ.

(2) 正の定数 b, c があって次の不等式 (あ), (い) を満たしていることを示せ.

$$(あ) \quad b \leq f'(x) \leq 1.$$

$$(い) \quad 0 \leq f(x) \left(\frac{1}{f'(x)} - 1 \right) \leq c.$$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ を求めよ. また $f'(x)$ の最小値を求めよ.