

京都大学（理系） 1984 年 第 6 問

区間 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ で定義された関数 $f(x)$ について、次のことを仮定する.

- (イ) 関数 $f(x)$ は連続であり、更に $f(x)$ およびその導関数 $f'(x)$ について、微分と積分を自由に行うことができる.
- (ロ) 区間 $[a, b]$ で、つねに不等式 $a \leq f(x) \leq b$ が成り立つ.
- (ハ) 区間 $[a, b]$ でつねに不等式 $|f'(x)| \leq k < 1$ が成り立つような定数 k が存在する.

このとき、次の問に答えよ.

- (1) 等式 $f(c_0) = c_0$ を満たす値 c_0 が、区間 $[a, b]$ の中に、ただ 1 つ存在することを、簡単に説明せよ.
- (2) 区間 $[a, b]$ の中の（任意の）1 つの値 d_0 から出発して、 $d_1 = f(d_0)$, $d_{n+1} = f(d_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく. このとき、不等式 $|d_n - c_0| \leq k^n |d_0 - c_0|$ ($n = 1, 2, \dots$) が成立することを示せ. ただし、 c_0 は問 (1) に述べられている値とする.