

京都大学（理系） 1983 年 第 3 問

$ab + cd = 0$ ,  $ad - bc \neq 0$  を満たす実数  $a, b, c, d$  のつくる行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  がある. ただし,  $a, c$  は負ではないとする.

(1)  $A = \begin{pmatrix} v \cos \theta & -v \sin \theta \\ v \sin \theta & v \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$  と表されることを示せ. ただし,  $u, v, \theta$  は実数で,  $v > 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$  とする.

(2)  $O$  を原点とする座標平面上の 1 次変換  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  について, 長さ 1 のベクトル  $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  から, ベクトル  $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  への角度を  $\gamma$  ( $-\pi < \gamma \leq \pi$ ) とする (したがって, 半直線  $OP$  を角度  $\gamma$  だけ回転すれば半直線  $OP'$  となる).  $(x, y)$  が  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $x^2 + y^2 = 1$  の範囲を動いたとき,  $\gamma$  を最大にする  $\overrightarrow{OP}$  を求めよ. ただし,  $0 < u < 1$  とする.