

京都大学（文系） 1983 年 第 3 問

$ab + cd = 0$, $ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d のつくる行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ がある. ただし, a, c は負ではないとする.

(1) $A = \begin{pmatrix} v \cos \theta & -v \sin \theta \\ v \sin \theta & v \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ と表されることを示せ. ただし, u, v, θ は実数で, $v > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする.

(2) O を原点とする座標平面上の 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について, 長さ 1 のベクトル $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ から, ベクトル $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ への角度を γ ($-\pi < \gamma \leq \pi$) とする (したがって, 半直線 OP を角度 γ だけ回転すれば半直線 OP' となる). (x, y) が $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 1$ の範囲を動いたとき, γ を最大にする $\overrightarrow{OP}$ を求めよ. ただし, $0 < u < 1$ とする.