

京都大学 (理系) 1979 年 第 6 問

平面上に動点 P がある. 時刻 $t (t \geq 0)$ のときの P の座標 (x, y) は次の式で与えられる.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

ただし, a, b, c_1, c_2 は定数であって, $a > 0, b > 0$ であり, 定点 $C(c_1, c_2)$ は原点 $O(0, 0)$ とは異なるものとする. このとき

- (1) 動点 P の速度ベクトルと動径 OP とのなす角は一定であることを示せ.
- (2) 動点 P が C を出発したのち, 線分 OC と最初に交わる点を C_1 , 第 2 回目に交わる点を C_2 とする. 一般に, 第 k 回目に OC と交わる点を C_k とする. P の経過した道のり $\widehat{CC_1}, \widehat{C_1C_2}, \dots, \widehat{C_kC_{k+1}}, \dots$ は等比数列であることを示せ.