

角 θ の回転を表わす行列を $R(\theta)$ とする. すなわち

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

とする. 2 次正方行列 X で, $X^3 = R(\theta)$ をみたすものはどれだけあるかを考えたい.

- (1) 行列 X が $X^3 = R(\theta)$ をみたせば, X は逆行列をもち, かつ $R(\theta)X = XR(\theta)$ が成立することを示せ.
- (2) 行列 X が, ある角 α の回転を表わす行列 $R(\alpha)$ と, 左上が正, 左下が 0 であるような行列 T との積であるとする. すなわち $X = R(\alpha)T$, ただし

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad a > 0$$

とする. このとき, もし X が $R(\theta)X = XR(\theta)$ をみたし, さらに θ が π の整数倍でなければ, $a = c$, $b = 0$ であることを示せ.

- (3) 一般に, 逆行列をもつ任意の行列 X は, ある角 α の回転を表わす行列 $R(\alpha)$ と, 左上が正, 左下が 0 であるような行列 T との積 $X = R(\alpha)T$ として表わされる. 行列に対応する 1 次変換を考えることによって, このことを示せ.
- (4) $X^3 = R(\theta)$ をみたす行列 X は, θ が π の整数倍でなければ, ちょうど 3 個存在し, θ が π の整数倍ならば, 無限に多く存在することを示せ.