（2026 前）

数　　学

（理　科　系）

（1〜12 ページ）

- 白紙は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学（理科系）　　150 点

試験時間　120 分

1. 1 個のさいころを 3 回続けて投げ，出た目の数を順に a，b，c とおく．多項式 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + 3x + b, \quad g(x) = x^2 + cx + 1$$

とし，$f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの余りを $r(x)$ とおく．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $r(x)$ が 0 である確率を求めよ．

(2) $r(x)$ が 0 でなく，かつ，$r(x)$ の次数が 0 である確率を求めよ．

(3) 方程式 $g(x) = 0$ が有理数の解をもつ確率を求めよ．ただし，50 以下の正の整数 n に対し，n が 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 のいずれとも異なるならば，$\sqrt{n}$ が無理数であることを必要に応じて用いてよい．

(4) $r(x)$ の次数が 1 であり，かつ，$g(x)$ が $r(x)$ で割り切れる確率を求めよ．

2. 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sin(\log x)\cos(\log x) \qquad (1 \leqq x \leqq e^{\pi})$$

と定める．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形を図示せよ．グラフの凹凸は調べなくてよい．

(2) $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分のうち，$y \geqq 0$ である部分の面積を求めよ．

3. 整数 m が性質 P をみたすとは,

$$m = |z^2|$$

が成り立つような実部と虚部が共に整数である複素数 z が存在することとする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) 性質 P をみたす整数 m で $30 < m < 40$ をみたすものをすべて挙げよ.

(2) 性質 P をみたす整数 2 つの積は，性質 P をみたすことを証明せよ.

(3) 4 で割った余りが 3 であるような整数は，性質 P をみたさないことを証明せよ.

4. $0 \leqq a \leqq \pi$ とする．関数 $f(x)$ は x の連続関数とし，

$$g(x) = \int_a^x f(t)\sin(x-t)\,dt$$

とおく．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $g'(a)$ を求めよ．

(2) $g''(x)$ を $f(x)$ と $g(x)$ を用いて表せ．

(3) 条件「$g(x) = \sin x - \sin^2 x$」は，条件「$f(x) = \sin^2 x - 2\cos^2 x$ かつ $a = \dfrac{\pi}{2}$」であるための必要十分条件であることを証明せよ．

5. r を正の実数とする．複素数 α が

$$\left(1+r^2\right)\alpha^2-2\alpha+1=0$$

をみたすとする．複素数平面上の 3 点 O(0)，A(α)，B(1) について以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) 次の条件をみたす円 C が存在することを証明し，C の中心を表す複素数と C の半径を求めよ．

条件「すべての正の実数 r に対して，A は C 上にある．」

(2) $t>0$ とし，$r=te^{-t}$ とする．$t>0$ における △OAB の面積の最大値とそれを与える t を求めよ．