

(2024 前)

数 学

(理 科 系)

(1～12 ページ)

- 白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学 (理科系) 150 点

試験時間 120 分

1. c を正の実数とする. 各項が正である数列 $\{a_n\}$ を次のように定める. a_1 は関数

$$y = x + \sqrt{c - x^2} \quad (0 \leq x \leq \sqrt{c})$$

が最大値をとるときの x の値とする. a_{n+1} は関数

$$y = x + \sqrt{a_n - x^2} \quad (0 \leq x \leq \sqrt{a_n})$$

が最大値をとるときの x の値とする. 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log_2 a_n$ で定める. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) a_1 を c を用いて表せ.
- (2) b_{n+1} を b_n を用いて表せ.
- (3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を n と c を用いて表せ.

2. a, b, c は実数で, $a \neq 0$ とする. 放物線 C と直線 ℓ_1, ℓ_2 をそれぞれ

$$C : y = ax^2 + bx + c$$

$$\ell_1 : y = -3x + 3$$

$$\ell_2 : y = x + 3$$

で定める. ℓ_1, ℓ_2 がともに C に接するとき, 以下の問に答えよ.
(配点 30 点)

- (1) b を求めよ. また c を a を用いて表せ.
- (2) C が x 軸と異なる 2 点で交わる時, $\frac{1}{a}$ のとりうる値の範囲を求めよ.
- (3) C と ℓ_1 の接点を P , C と ℓ_2 の接点を Q , 放物線 C の頂点を R とする. a が (2) の条件を満たしながら動くとき, $\triangle PQR$ の重心 G の軌跡を求めよ.

3. n を自然数とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) 1 個のサイコロを投げて出た目が必ず n の約数となるような n を小さい順に 3 つ求めよ.
- (2) 1 個のサイコロを投げて出た目が n の約数となる確率が $\frac{5}{6}$ であるような n を小さい順に 3 つ求めよ.
- (3) 1 個のサイコロを 3 回投げて出た目の積が 160 の約数となる確率を求めよ.

4. 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正方形 ABCD を底面にもち、高さが 1 である直方体 ABCD-EFGH を、頂点の座標がそれぞれ

$$\begin{aligned} A(1, 0, 0), \quad B(0, 1, 0), \quad C(-1, 0, 0), \quad D(0, -1, 0), \\ E(1, 0, 1), \quad F(0, 1, 1), \quad G(-1, 0, 1), \quad H(0, -1, 1) \end{aligned}$$

になるように xyz 空間内におく．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

- (1) 直方体 ABCD-EFGH を直線 AE のまわりに 1 回転してできる回転体を X_1 とし、また直線 AB のまわりに 1 回転してできる回転体を X_2 とする． X_1 の体積 V_1 と X_2 の体積 V_2 を求めよ．
- (2) $0 \leq t \leq 1$ とする．平面 $x = t$ と線分 EF の共有点の座標を求めよ．
- (3) 直方体 ABCD-EFGH を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を X_3 とする． X_3 の体積 V_3 を求めよ．

5. 0 以上の実数 x に対して,

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{-x}^x \frac{1}{1+u^2} du$$

と定める. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 α に対して, $f(\tan \alpha)$ を求めよ.
- (2) xy 平面上で, 次の連立不等式の表す領域を図示せよ.

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad f(x) + f(y) \leq f(1)$$

またその領域の面積を求めよ.

