（2023 前）

数　　学

（理　科　系）

（1〜12 ページ）

- 白紙は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学（理科系）　　150 点

試験時間　120 分

1. 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} & (x \leqq 1) \\ 2x - 1 & (x > 1) \end{cases}$$

で定める．a を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$$

で定める．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) すべての実数 x について $f(x) \geqq x$ が成り立つことを示せ.

(2) $a \leqq 1$ のとき，すべての正の整数 n について $a_n \leqq 1$ が成り立つことを示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を n と a を用いて表せ.

2. a, b を実数とする．整式 $f(x)$ を $f(x) = x^2 + ax + b$ で定める．以下の問に答えよ．ただし，2 次方程式の重解は 2 つと数える．(配点 30 点)

(1) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの正の解をもつための a と b がみたすべき必要十分条件を求めよ．

(2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ の 2 つの解の実部が共に 0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

(3) 2 次方程式 $f(x) = 0$ の 2 つの解の実部が共に -1 より大きく，0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

3. n を 2 以上の整数とする．袋の中には 1 から $2n$ までの整数が 1 つずつ書いてある $2n$ 枚のカードが入っている．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ．

(2) この袋から同時に 3 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ．

(3) この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が $2n+1$ 以上である確率を求めよ．

4. 四面体 OABC があり，辺 OA，OB，OC の長さはそれぞれ $\sqrt{13}$，5，5 である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 1$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = -11$ とする．頂点 O から △ABC を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を H とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) 線分 AB の長さを求めよ．

(2) 実数 s，t を $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ をみたすように定めるとき，s と t の値を求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

5. 媒介変数表示

$$x = \sin t, \quad y = \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\sin t \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 0$ または $\dfrac{dy}{dt} = 0$ となる t の値を求めよ.

(2) C の概形を xy 平面上に描け.

(3) C の $y \leqq 0$ の部分と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.