

入学試験過去問題

数 学

神戸大学（理科系）

対象年度：2021 年

試験時間：120 分

問題数：5 問

第 1 問

i を虚数単位とする．以下の問に答えよ．

- (1) $n = 2, 3, 4, 5$ のとき $(2 + i)^n$ を求めよ．またそれらの虚部の整数を 10 で割った余りを求めよ．
- (2) n を正の整数とすると $(2 + i)^n$ は虚数であることを示せ．

第 2 問

次の定積分を求めよ.

$$(1) \quad I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx$$

$$(2) \quad J = \int_0^1 x^3 \log(x^2+1) \, dx$$

第 3 問

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が垂直であるとする. $\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{a} + 3\vec{b}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とする. 以下の問に答えよ.

- (1) $|\vec{a}| = x$, $|\vec{b}| = y$ とするとき, $\sin^2 \theta$ を x , y を用いて表せ.
- (2) θ の最大値を求めよ.

第 4 問

m を実数とする．座標平面上の放物線 $y = x^2$ と直線 $y = mx + 1$ の共有点を A, B とし，原点を O とする．以下の問に答えよ．

- (1) $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ．
- (2) 3 点 A, B, O を通る円の方程式を求めよ．
- (3) 放物線 $y = x^2$ と (2) の円が A, B, O 以外の共有点をもたないような m の値をすべて求めよ．

第 5 問

座標平面上を運動する点 $P(x, y)$ の時刻 t における座標が

$$x = \frac{4 + 5 \cos t}{5 + 4 \cos t}, \quad y = \frac{3 \sin t}{5 + 4 \cos t}$$

であるとき、以下の問に答えよ.

- (1) 点 P と原点 O との距離を求めよ.
- (2) 点 P の時刻 t における速度 $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ と速さ $|\vec{v}|$ を求めよ.
- (3) 定積分 $\int_0^\pi \frac{dt}{5 + 4 \cos t}$ を求めよ.