（2021 前）

数　　学

（理　科　系）

（1〜12 ページ）

- 白紙は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学（理科系）　　150 点

試験時間　120 分

1. i を虚数単位とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $n = 2, 3, 4, 5$ のとき $(2+i)^n$ を求めよ．またそれらの虚部の整数を 10 で割った余りを求めよ．

(2) n を正の整数とするとき $(2+i)^n$ は虚数であることを示せ．

2. 次の定積分を求めよ．(配点 30 点)

(1) $I = \displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

(2) $J = \displaystyle\int_0^1 x^3\log(x^2+1)\,dx$

3. $\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ が垂直であるとする．$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $\left|\overrightarrow{a}\right| = x$，$\left|\overrightarrow{b}\right| = y$ とするとき，$\sin^2\theta$ を x，y を用いて表せ．

(2) θ の最大値を求めよ．

4. m を実数とする．座標平面上の放物線 $y = x^2$ と直線 $y = mx + 1$ の共有点を A，B とし，原点を O とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ．

(2) 3 点 A，B，O を通る円の方程式を求めよ．

(3) 放物線 $y = x^2$ と (2) の円が A，B，O 以外の共有点をもたないような m の値をすべて求めよ．

5. 座標平面上を運動する点 P $(x,\ y)$ の時刻 t における座標が

$$x = \frac{4 + 5\cos t}{5 + 4\cos t}, \quad y = \frac{3\sin t}{5 + 4\cos t}$$

であるとき，以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) 点 P と原点 O との距離を求めよ．

(2) 点 P の時刻 t における速度 $\overrightarrow{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と速さ $\left|\overrightarrow{v}\right|$ を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{5 + 4\cos t}$ を求めよ．