（2020 前）

数　　学

（理　科　系）

（1〜12 ページ）

- 白紙は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学（理科系）　　150 点

試験時間　120 分

1. α は実数とし，$f(x)$ は係数が実数である 3 次式で，次の条件 (i), (ii) をみたすとする．

(i) $f(x)$ の x^3 の係数は 1 である．

(ii) $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ について，

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$$

が成り立つ．

以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れることを示せ．

(2) $f(\alpha+2) = 0$ とする．$f'(x) = 0$ かつ $x \neq \alpha$ をみたす x を α を用いて表せ．

(3) (2) の条件のもとで $\alpha = 0$ とする．xy 平面において不等式

$$y \geqq f(x) \text{ かつ } y \geqq f'(x) \text{ かつ } y \leqq 0$$

の表す部分の面積を求めよ．

2. θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とし，原点 O，A$(1,\ 0)$，B$(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ を頂点とする $\triangle$OAB の内接円の中心を P とする．また，θ がこの範囲を動くときに点 P が描く曲線と線分 OA によって囲まれた部分を D とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) 点 P の座標は $\left(1-\sin\theta,\ \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$ で表されることを示せ．

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

3. 以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) 和が 30 になる 2 つの自然数からなる順列の総数を求めよ．

(2) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる順列の総数を求めよ．

(3) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる組合せの総数を求めよ．

4. n を自然数とし，$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ に対して $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $f(x)$ が最大となる x の値がただ 1 つ存在することを示せ.

(2) (1) の x の値を x_n とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\tan x_n}$ を求めよ.

5. p を 2 以上の自然数とし，数列 $\{x_n\}$ は

$$x_1 = \frac{1}{2^p + 1}, \quad x_{n+1} = |2x_n - 1| \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

をみたすとする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $p = 3$ のとき，x_n を求めよ．

(2) $x_{p+1} = x_1$ であることを示せ．