

(2018 前)

数 学

(理 科 系)

(1～12 ページ)

- 白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学 (理科系) 150 点

試験時間 120 分

1. t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする. $OABC$ を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする. 辺 OA を $1-t:t$ に内分する点を P , 辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を Q , 辺 BC の中点を R とする. また $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) $\overrightarrow{QP}$ と $\overrightarrow{QR}$ を t , $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.

(2) $\angle PQR = \frac{\pi}{2}$ のとき, t の値を求めよ.

(3) t が (2) で求めた値をとるとき, $\triangle PQR$ の面積を求めよ.

2. k を 2 以上の整数とする. また

$$f(x) = \frac{1}{k} \left((k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}} \right)$$

とおく. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) $x > 0$ において, 関数 $y = f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ.
- (2) 数列 $\{x_n\}$ が $x_1 > 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たすとき, $x_n > 1$ を示せ.
- (3) (2) の数列 $\{x_n\}$ に対し,

$$x_{n+1} - 1 < \frac{k-1}{k}(x_n - 1)$$

を示せ. また $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ.

3. さいころを3回ふって、1回目に出た目の数を a 、2回目と3回目に出た目の数の和を b とし、2次方程式

$$x^2 - ax + b = 0 \quad \cdots \cdots (*)$$

を考える。以下の問に答えよ。(配点30点)

- (1) $(*)$ が $x = 1$ を解にもつ確率を求めよ。
- (2) $(*)$ が整数を解にもつとする。このとき $(*)$ の解は共に正の整数であり、また少なくとも1つの解は3以下であることを示せ。
- (3) $(*)$ が整数を解にもつ確率を求めよ。

4. 整式 $f(x)$ は実数を係数にもつ 3 次式で, 3 次の係数は 1, 定数項は -3 とする. 方程式 $f(x) = 0$ は, 1 と虚数 α, β を解にもつとし, α の実部は 1 より大きく, α の虚部は正とする. 複素数平面上で $\alpha, \beta, 1$ が表す点を順に A, B, C とし, 原点を O とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) α の絶対値を求めよ.
- (2) θ を α の偏角とする. $\triangle ABC$ の面積 S を θ を用いて表せ.
- (3) S を最大にする θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とそのときの整式 $f(x)$ を求めよ.

5. 座標空間において, O を原点とし, $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(1, 1, 0)$ とする. $\triangle OAB$ を直線 OC の周りに 1 回転してできる回転体を L とする. 以下の間に答えよ. (配点 30 点)

(1) 直線 OC 上にない点 $P(x, y, z)$ から直線 OC におろした垂線を PH とする. $\overrightarrow{OH}$ と $\overrightarrow{HP}$ を x, y, z の式で表せ.

(2) 点 $P(x, y, z)$ が L の点であるための条件は

$$z^2 \leq 2xy \text{ かつ } 0 \leq x + y \leq 2$$

であることを示せ.

(3) $1 \leq a \leq 2$ とする. L を平面 $x = a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ.

(4) 立体 $\{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in L, 1 \leq x \leq 2\}$ の体積を求めよ.

