

(2017 前)

数 学

(理 科 系)

(1～12 ページ)

- 白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学 (理科系) 150 点

試験時間 120 分

1. n を自然数とする.

$$f(x) = \sin x - nx^2 + \frac{1}{9}x^3$$

とおく. $3 < \pi < 4$ であることを用いて, 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $f''(x) < 0$ であることを示せ.
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ 1 つもつことを示せ.
- (3) (2) における解を x_n とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ であることを示し, $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$ を求めよ.

2. n を自然数とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) 実数 x に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

(2) 次の等式をみたす S の値を求めよ．

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (1 - e^{-k})}{k} - S = (-1)^n \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx$$

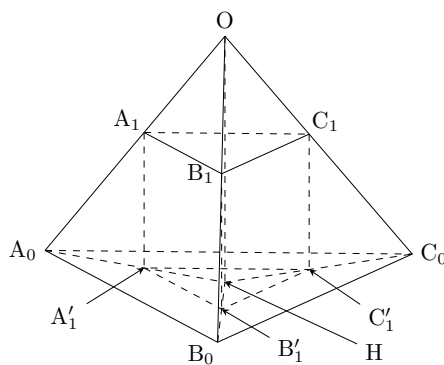
(3) 不等式

$$\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

が成り立つことを示し， $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (1 - e^{-k})}{k}$ を求めよ．

3. 1 辺の長さが a_0 の正四面体 $OA_0B_0C_0$ がある. 図のように, 辺 OA_0 上の点 A_1 , 辺 OB_0 上の点 B_1 , 辺 OC_0 上の点 C_1 から平面 $A_0B_0C_0$ に下ろした垂線をそれぞれ $A_1A'_1$, $B_1B'_1$, $C_1C'_1$ としたとき, 三角柱 $A_1B_1C_1-A'_1B'_1C'_1$ は正三角柱になるとする. ただし, ここでは底面が正三角形であり, 側面が正方形である三角柱を正三角柱とよぶことにする. 同様に, 点 $A_2, B_2, C_2, A'_2, B'_2, C'_2, \dots$ を次のように定める. 正四面体 $OA_kB_kC_k$ において, 辺 OA_k 上の点 A_{k+1} , 辺 OB_k 上の点 B_{k+1} , 辺 OC_k 上の点 C_{k+1} から平面 $A_kB_kC_k$ に下ろした垂線をそれぞれ $A_{k+1}A'_{k+1}$, $B_{k+1}B'_{k+1}$, $C_{k+1}C'_{k+1}$ としたとき, 三角柱 $A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}-A'_{k+1}B'_{k+1}C'_{k+1}$ は正三角柱になるとする. 辺 A_kB_k の長さを a_k とし, 正三角柱 $A_kB_kC_k-A'_kB'_kC'_k$ の体積を V_k とするとき, 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) 点 O から平面 $A_0B_0C_0$ に下ろした垂線を OH とし, $\theta = \angle OA_0H$ とするとき, $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の値を求めよ.
- (2) a_1 を a_0 を用いて表せ.
- (3) V_k を a_0 を用いて表し, $\sum_{k=1}^{\infty} V_k$ を求めよ.



4. $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, -1, -1)$, $\vec{v}_3 = (-1, 1, -1)$, $\vec{v}_4 = (-1, -1, 1)$ とする. 座標空間内の動点 P が原点 O から出発し, 正四面体のサイコロ (1, 2, 3, 4 の目がそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で出る) をふるごとに, 出た目が k ($k = 1, 2, 3, 4$) のときは $\vec{v}_k$ だけ移動する. すなわち, サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置を P_n として, サイコロを $(n+1)$ 回目によって出た目が k ならば

$$\overrightarrow{P_n P_{n+1}} = \vec{v}_k$$

である. ただし, $P_0 = O$ である. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) 点 P_2 が x 軸上にある確率を求めよ.
- (2) $\overrightarrow{P_0 P_2} \perp \overrightarrow{P_2 P_4}$ となる確率を求めよ.
- (3) 4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 が同一平面上にある確率を求めよ.
- (4) n を 6 以下の自然数とする. $P_n = O$ となる確率を求めよ.

5. r, c, ω は正の定数とする. 座標平面上の動点 P は時刻 $t = 0$ のとき原点にあり, 毎秒 c の速さで x 軸上を正の方向へ動いているとする. また, 動点 Q は時刻 $t = 0$ のとき点 $(0, -r)$ にあるとする. 点 P から見て, 動点 Q が点 P を中心とする半径 r の円周上を毎秒 ω ラジアン割合で反時計回りに回転しているとき, 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) 時刻 t における動点 Q の座標 $(x(t), y(t))$ を求めよ.
- (2) 動点 Q の描く曲線が交差しない, すなわち, $t_1 \neq t_2$ ならば $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$ であるための必要十分条件を r, c, ω を用いて与えよ.

