

(2016 前)

数 学

(理 科 系)

(1～12 ページ)

- 白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学 (理科系) 150 点

試験時間 120 分

1. 四面体 $OABC$ において、 P を辺 OA の中点、 Q を辺 OB を $2:1$ に内分する点、 R を辺 BC の中点とする。 P 、 Q 、 R を通る平面と辺 AC の交点を S とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。
以下の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) $\overrightarrow{PQ}$ 、 $\overrightarrow{PR}$ をそれぞれ $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 比 $|\overrightarrow{AS}| : |\overrightarrow{SC}|$ を求めよ。

(3) 四面体 $OABC$ を 1 辺の長さが 1 の正四面体とすると、 $|\overrightarrow{QS}|$ を求めよ。

2. a を正の定数とし, $f(x) = |x^2 + 2ax + a|$ とおく. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.
- (2) $a = 2$ とする. すべての実数 x に対して $f(x) \geq 2x + b$ が成り立つような実数 b の取りうる値の範囲を求めよ.
- (3) $0 < a \leq \frac{3}{2}$ とする. すべての実数 x に対して $f(x) \geq 2x + b$ が成り立つような実数 b の取りうる値の範囲を a を用いて表せ. また, その条件をみたす点 (a, b) の領域を ab 平面上に図示せよ.

3. a を正の定数とし, 2 曲線 $C_1 : y = \log x$, $C_2 : y = ax^2$ が点 P で接しているとする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) P の座標と a の値を求めよ.
- (2) 2 曲線 C_1 , C_2 と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

4. 約数, 公約数, 最大公約数を次のように定める.

- 2つの整数 a, b に対して, $a = bk$ をみたす整数 k が存在するとき, b は a の約数であるという.
- 2つの整数に共通の約数をそれらの公約数という.
- 少なくとも一方が0でない2つの整数の公約数の中で最大のものをそれらの最大公約数という.

以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) a, b, c, p は0でない整数で $a = pb + c$ をみたしているとする.

- (i) $a = 18, b = 30, c = -42, p = 2$ のとき, a と b の公約数の集合 S , および b と c の公約数の集合 T を求めよ.
- (ii) a と b の最大公約数を M , b と c の最大公約数を N とする.
 M と N は等しいことを示せ. ただし, a, b, c, p は0でない任意の整数とする.

(2) 自然数の列 $\{a_n\}$ を

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 4$$

で定める.

- (i) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ.
- (ii) a_{n+1} を a_{n+2} と a_n を用いて表せ.
- (iii) a_{n+2} と a_n の最大公約数を求めよ.

5. 極方程式で表された xy 平面上の曲線 $r = 1 + \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を C とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) 曲線 C 上の点を直交座標 (x, y) で表したとき, $\frac{dx}{d\theta} = 0$ となる点, および $\frac{dy}{d\theta} = 0$ となる点の直交座標を求めよ.
- (2) $\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{dy}{dx}$ を求めよ.
- (3) 曲線 C の概形を xy 平面上にかけ.
- (4) 曲線 C の長さを求めよ.

