（2015 前）

数　　学

（理　科　系）

（1〜12 ページ）

- 白紙は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学（理科系）　　150 点

試験時間　120 分

1. 座標平面上の 2 つの曲線 $y = \dfrac{x-3}{x-4}$，$y = \dfrac{1}{4}(x-1)(x-3)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) 2 曲線 C_1，C_2 の交点をすべて求めよ．

(2) 2 曲線 C_1，C_2 の概形をかき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ．

2. 座標平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を C とする．$a>2$，$0<\theta<\pi$ とし，x 軸上の点 $\mathrm{A}\,(a,\ 0)$ と楕円 C 上の点 $\mathrm{P}\,(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる．原点を O とし，直線 AP と y 軸との交点を Q とする．点 Q を通り x 軸に平行な直線と，直線 OP との交点を R とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) 点 R の座標を求めよ．

(2) (1) で求めた点 R の y 座標を $f(\theta)$ とする．このとき，$0<\theta<\pi$ における $f(\theta)$ の最大値を求めよ．

(3) 原点 O と点 R の距離の 2 乗を $g(\theta)$ とする．このとき，$0<\theta<\pi$ における $g(\theta)$ の最小値を求めよ．

3. a を正の実数とする．座標平面上の曲線 C を

$$y = x^4 - 2(a+1)x^3 + 3ax^2$$

で定める．曲線 C が 2 つの変曲点 P，Q をもち，それらの x 座標の差が $\sqrt{2}$ であるとする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) a の値を求めよ．

(2) 線分 PQ の中点と x 座標が一致するような，C 上の点を R とする．三角形 PQR の面積を求めよ．

(3) 曲線 C 上の点 P における接線が P 以外で C と交わる点を P′ とし，点 Q における接線が Q 以外で C と交わる点を Q′ とする．線分 P′Q′ の中点の x 座標を求めよ．

4. a，b を実数とし，自然数 k に対して $x_k = \dfrac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}$ とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $x_k = \dfrac{p}{k} + \dfrac{q}{k+1} + \dfrac{r}{k+3}$ がすべての自然数 k について成り立つような実数 p，q，r を，a，b を用いて表せ．

(2) $b=0$ のとき，3 以上の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．また，$a=0$ のとき，4 以上の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．

(3) 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ の和を求めよ．

5. a，b，c を 1 以上 7 以下の自然数とする．次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$ 3 辺の長さが a，b，c である三角形と，3 辺の長さが $\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する．

以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $a = b > c$ であり，かつ条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

(2) $a > b > c$ であり，かつ条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

(3) 条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．