（2014 前）

数　　学

（理　科　系）

（1〜12 ページ）

- 白紙は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学（理科系）　　150 点

試験時間　120 分

1. a を実数とし，$f(x) = xe^x - x^2 - ax$ とする．曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線の傾きを -1 とする．このとき，以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) a の値を求めよ．

(2) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ．

(3) b を実数とするとき，2 つの曲線 $y = xe^x$ と $y = x^2 + ax + b$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲での共有点の個数を調べよ．

2. m，n $(m < n)$ を自然数とし，

$$a = n^2 - m^2, \quad b = 2mn, \quad c = n^2 + m^2$$

とおく．三辺の長さが a，b，c である三角形の内接円の半径を r とし，その三角形の面積を S とする．このとき，以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $a^2 + b^2 = c^2$ を示せ．

(2) r を m，n を用いて表せ．

(3) r が素数のときに，S を r を用いて表せ．

(4) r が素数のときに，S が 6 で割り切れることを示せ．

3. 空間において，原点 O を通らない平面 α 上に一辺の長さ 1 の正方形があり，その頂点を順に A，B，C，D とする．このとき，以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ.

(2) $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC}$ のとき，ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

が，平面 α と垂直であることを示せ.

4. n を自然数とする．1 から $2n$ までの番号をつけた $2n$ 枚のカードを袋に入れ，よくかき混ぜて n 枚を取り出し，取り出した n 枚のカードの数字の合計を A，残された n 枚のカードの数字の合計を B とする．このとき，以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) n が奇数のとき，A と B が等しくないことを示せ.

(2) n が偶数のとき，A と B の差は偶数であることを示せ.

(3) $n = 4$ のとき，A と B が等しい確率を求めよ.

5. a, bを正の実数とし，xy平面上に3点O$(0,\ 0)$，A$(a,\ 0)$，B$(a,\ b)$をとる．三角形OABを，原点Oを中心に90°回転するとき，三角形OABが通過してできる図形をDとする．このとき，以下の問に答えよ．(配点30点)

(1) Dをxy平面上に図示せよ．

(2) Dをx軸のまわりに1回転してできる回転体の体積Vを求めよ．

(3) $a+b=1$のとき，(2)で求めたVの最小値と，そのときのaの値を求めよ．