（2013 前）

数　　学

（理　科　系）

（1〜12 ページ）

- 白紙は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学（理科系）　　150 点

試験時間　120 分

1. 空間において，2点 $\mathrm{A}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$ を通る直線を ℓ とする．次の問いに答えよ．(配点30点)

(1) 点 P を ℓ 上に，点 Q を z 軸上にとる．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がベクトル $(3,\ 1,\ -1)$ と平行になるときの P と Q の座標をそれぞれ求めよ．

(2) 点 R を ℓ 上に，点 S を z 軸上にとる．$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ およびベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ の両方に垂直になるときの R と S の座標をそれぞれ求めよ．

(3) R，S を (2) で求めた点とする．点 T を ℓ 上に，点 U を z 軸上にとる．また，$\overrightarrow{v} = (a,\ b,\ c)$ は零ベクトルではなく，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ に垂直ではないとする．$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ が $\overrightarrow{v}$ と平行になるときの T と U の座標をそれぞれ求めよ．

2. p, r を $-r < p < r$ をみたす実数とする．4 点 $\mathrm{P}\left(p,\ p^2\right)$, $\mathrm{Q}\left(r,\ p^2\right)$, $\mathrm{R}\left(r,\ r^2\right)$, $\mathrm{S}\left(p,\ r^2\right)$ に対し，線分 PR の長さは 1 であるとする．このとき，長方形 PQRS の面積の最大値と，そのときの P，R の x 座標をそれぞれ求めよ．(配点 30 点)

3. c を $0 < c < 1$ をみたす実数とする．$f(x)$ を 2 次以下の多項式とし，曲線 $y = f(x)$ が 3 点 $(0,\ 0)$，$\left(c,\ c^3 - 2c\right)$，$(1,\ -1)$ を通るとする．次の問いに答えよ．(配点 30 点)

(1) $f(x)$ を求めよ.

(2) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = x^3 - 2x$ で囲まれた部分の面積 S を c を用いて表せ.

(3) (2) で求めた S を最小にするような c の値を求めよ.

4. a，b を実数とする．次の問いに答えよ．(配点 30 点)

(1) $f(x) = a\cos x + b$ が，

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\pi}{4} + \int_0^{\pi} \{f(x)\}^3\,dx$$

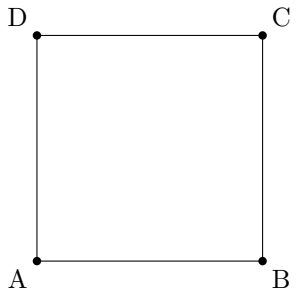
をみたすとする．このとき，a，b がみたす関係式を求めよ．

(2) (1) で求めた関係式をみたす正の数 b が存在するための a の条件を求めよ．

5. 動点Pが，図のような正方形ABCDの頂点Aから出発し，さいころをふるごとに，次の規則により正方形のある頂点から他の頂点に移動する．

出た目の数が2以下なら辺ABと平行な方向に移動する．
出た目の数が3以上なら辺ADと平行な方向に移動する．

n を自然数とするとき，さいころを $2n$ 回ふった後に動点PがAにいる確率を a_n，Cにいる確率を c_n とする．次の問いに答えよ．(配点30点)



(1) a_1 を求めよ．

(2) さいころを $2n$ 回ふった後，動点PはAまたはCにいることを証明せよ．

(3) a_n，c_n を n を用いてそれぞれ表せ．

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} c_n$ をそれぞれ求めよ．