

(2012 前)

数 学

(理 科 系)

(1～12 ページ)

- 白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学 (理科系) 150 点

試験時間 120 分

1. 座標平面上に2点 $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$ と直線 ℓ があり, A と ℓ の距離と B と ℓ の距離の和が1であるという. 以下の問に答えよ. (配点30点)

- (1) ℓ は y 軸と平行でないことを示せ.
- (2) ℓ が線分 AB と交わる時, ℓ の傾きを求めよ.
- (3) ℓ が線分 AB と交わらないとき, ℓ と原点との距離を求めよ.

2. x を実数とし, $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = A - xE$ とおく. P は $P^2 = P$ をみたすとする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) x の値を求めよ.

(2) n を自然数とする.

$$A^n = a_n P + b_n E$$

をみたす a_n , b_n を n を用いて表せ.

3. $x > 0$ に対し関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

と定め, $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ とおく. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) $\frac{d}{dx}f(x)$ を求めよ.
- (2) $\frac{d}{dx}g(x)$ を求めよ.
- (3) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ を求めよ.

4. 自然対数の底を e とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) $e < 3$ であることを用いて, 不等式 $\log 2 > \frac{3}{5}$ が成り立つことを示せ.

(2) 関数 $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} - x$ の導関数を求めよ.

(3) 積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \cos x} dx$$

の値を求めよ.

(4) (3) で求めた値が正であるか負であるかを判定せよ.

5. 座標平面上の曲線 C を, 媒介変数 $0 \leq t \leq 1$ を用いて

$$\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$$

と定める. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) 曲線 C の概形を描け.
- (2) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分が, y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

