

# 入学試験過去問題

## 数 学

神戸大学（理科系）

対象年度：2011 年

試験時間：120 分

問題数：5 問

## 第 1 問

$i = \sqrt{-1}$  とする. 以下の問に答えよ.

- (1) 実数  $\alpha, \beta$  について, 等式

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

が成り立つことを示せ.

- (2) 自然数  $n$  に対して,

$$z = \sum_{k=1}^n \left( \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right)$$

とおくとき, 等式

$$z \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) = z$$

が成り立つことを示せ.

- (3) 2 以上の自然数  $n$  について, 等式

$$\sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi k}{n} = \sum_{k=1}^n \sin \frac{2\pi k}{n} = 0$$

が成り立つことを示せ.

## 第 2 問

以下の問に答えよ.

(1)  $t$  を正の実数とすると、 $|x| + |y| = t$  の表す  $xy$  平面上の図形を図示せよ.

(2)  $a$  を  $a \geq 0$  をみたす実数とする.  $x, y$  が連立不等式

$$\begin{cases} ax + (2 - a)y \geq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

をみたすとき、 $|x| + |y|$  のとりうる値の最小値  $m$  を、 $a$  を用いた式で表せ.

(3)  $a$  が  $a \geq 0$  の範囲を動くとき、(2) で求めた  $m$  の最大値を求めよ.

### 第 3 問

$n$  を 2 以上の自然数として,

$$S_n = \sum_{k=n}^{n^3-1} \frac{1}{k \log k}$$

とおく. 以下の問に答えよ.

(1)  $\int_n^{n^3} \frac{dx}{x \log x}$  を求めよ.

(2)  $k$  を 2 以上の自然数とすると,

$$\frac{1}{(k+1) \log(k+1)} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \log x} < \frac{1}{k \log k}$$

を示せ.

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  の値を求めよ.

## 第 4 問

$a$  は正の無理数で,  $X = a^3 + 3a^2 - 14a + 6$ ,  $Y = a^2 - 2a$  を考えると,  $X$  と  $Y$  はともに有理数である. 以下の問に答えよ.

- (1) 整式  $x^3 + 3x^2 - 14x + 6$  を整式  $x^2 - 2x$  で割ったときの商と余りを求めよ.
- (2)  $X$  と  $Y$  の値を求めよ.
- (3)  $a$  の値を求めよ. ただし, 素数の平方根は無理数であることを用いてよい.

## 第 5 問

以下の問に答えよ.

- (1)  $x \geq 1$  において,  $x > 2 \log x$  が成り立つことを示せ. ただし,  $e$  を自然対数の底とするとき,  $2.7 < e < 2.8$  であることを用いてよい.

- (2) 自然数  $n$  に対して,

$$(2n \log n)^n < e^{2n \log n}$$

が成り立つことを示せ.