

# 入学試験過去問題

## 数 学

神戸大学（理科系）

対象年度：2010年

試験時間：120分

問題数：5問

## 第 1 問

$a$  を実数とする. 関数  $f(x) = ax + \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x$  が極値をもたないように,  $a$  の値の範囲を定めよ.

## 第 2 問

$p$  を 3 以上の素数,  $a, b$  を自然数とする. 以下の問に答えよ. ただし, 自然数  $m, n$  に対し,  $mn$  が  $p$  の倍数ならば,  $m$  または  $n$  は  $p$  の倍数であることを用いてよい.

- (1)  $a + b$  と  $ab$  がともに  $p$  の倍数であるとき,  $a$  と  $b$  はともに  $p$  の倍数であることを示せ.
- (2)  $a + b$  と  $a^2 + b^2$  がともに  $p$  の倍数であるとき,  $a$  と  $b$  はともに  $p$  の倍数であることを示せ.
- (3)  $a^2 + b^2$  と  $a^3 + b^3$  がともに  $p$  の倍数であるとき,  $a$  と  $b$  はともに  $p$  の倍数であることを示せ.

### 第 3 問

$f(x) = \frac{\log x}{x}$ ,  $g(x) = \frac{2 \log x}{x^2}$  ( $x > 0$ ) とする. 以下の問に答えよ. ただし, 自然対数の底  $e$  について,  $e = 2.718 \dots$  であること,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$  であることを証明なしで用いてよい.

- (1) 2 曲線  $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  の共有点の座標をすべて求めよ.
- (2) 区間  $x > 0$  において, 関数  $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  の増減, 極値を調べ, 2 曲線  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  のグラフの概形をかけ. グラフの変曲点は求めなくてよい.
- (3) 区間  $1 \leq x \leq e$  において, 2 曲線  $y = f(x)$  と  $y = g(x)$ , および直線  $x = e$  で囲まれた図形の面積を求めよ.

## 第 4 問

$N$  を自然数とする．赤いカード 2 枚と白いカード  $N$  枚が入っている袋から無作為にカードを 1 枚ずつ取り出して並べていくゲームをする．2 枚目の赤いカードが取り出された時点でゲームは終了する．赤いカードが最初に取り出されるまでに取り出された白いカードの枚数を  $X$  とし，ゲーム終了時までに取り出された白いカードの総数を  $Y$  とする．このとき，以下の問に答えよ．

- (1)  $n = 0, 1, \dots, N$  に対して， $X = n$  となる確率  $p_n$  を求めよ．
- (2)  $X$  の期待値を求めよ．
- (3)  $n = 0, 1, \dots, N$  に対して， $Y = n$  となる確率  $q_n$  を求めよ．

## 第 5 問

座標平面において、点  $P_n(a_n, b_n)$  ( $n \geq 1$ ) を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 2)$$

で定める．このとき、以下の問に答えよ．

- (1)  $a_n, b_n$  を  $n$  と  $\theta$  を用いて表せ．
- (2)  $\theta = \frac{\pi}{3}$  のとき、自然数  $n$  に対して、線分  $P_n P_{n+1}$  の長さ  $l_n$  を求めよ．
- (3) (2) で求めた  $l_n$  に対して、 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$  を求めよ．