（2010 前）

数　　学

（理　科　系）

（1〜12 ページ）

- 白紙は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学（理科系）　　150 点

試験時間　120 分

1. a を実数とする．関数 $f(x) = ax + \cos x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$ が極値をもたないように，a の値の範囲を定めよ．(配点 30 点)

2. p を 3 以上の素数，a，b を自然数とする．以下の問に答えよ．ただし，自然数 m，n に対し，mn が p の倍数ならば，m または n は p の倍数であることを用いてよい．(配点 30 点)

(1) $a+b$ と ab がともに p の倍数であるとき，a と b はともに p の倍数であることを示せ.

(2) $a+b$ と a^2+b^2 がともに p の倍数であるとき，a と b はともに p の倍数であることを示せ.

(3) a^2+b^2 と a^3+b^3 がともに p の倍数であるとき，a と b はともに p の倍数であることを示せ.

3. $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$，$g(x) = \dfrac{2\log x}{x^2}$ $(x > 0)$ とする．以下の問に答えよ．ただし，自然対数の底 e について，$e = 2.718\cdots$ であること，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であることを証明なしで用いてよい．(配点 30 点)

(1) 2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点の座標をすべて求めよ．

(2) 区間 $x > 0$ において，関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の増減，極値を調べ，2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ のグラフの概形をかけ．グラフの変曲点は求めなくてよい．

(3) 区間 $1 \leqq x \leqq e$ において，2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$，および直線 $x = e$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

4. N を自然数とする．赤いカード 2 枚と白いカード N 枚が入っている袋から無作為にカードを 1 枚ずつ取り出して並べていくゲームをする．2 枚目の赤いカードが取り出された時点でゲームは終了する．赤いカードが最初に取り出されるまでに取り出された白いカードの枚数を X とし，ゲーム終了時までに取り出された白いカードの総数を Y とする．このとき，以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $n = 0, 1, \cdots, N$ に対して，$X = n$ となる確率 p_n を求めよ．

(2) X の期待値を求めよ．

(3) $n = 0, 1, \cdots, N$ に対して，$Y = n$ となる確率 q_n を求めよ．

5. 座標平面において，点 $\mathrm{P}_n\,(a_n,\ b_n)\ (n \geqq 1)$ を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (n \geqq 2)$$

で定める．このとき，以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) a_n，b_n を n と θ を用いて表せ．

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，自然数 n に対して，線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さ l_n を求めよ．

(3) (2) で求めた l_n に対して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ を求めよ．