（2009 前）

数　　学

（理　科　系）

（1〜12 ページ）

- 白紙は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学（理科系）　　150 点

試験時間　120 分

1. a, b は実数で $a > b > 0$ とする．区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で定義される関数 $f(x)$ を次のように定める．

$$f(x) = \log\left(ax + b(1-x)\right) - x\log a - (1-x)\log b$$

ただし，$\log$ は自然対数を表す．このとき，以下のことを示せ．(配点 30 点)

(1) $0 < x < 1$ に対して $f''(x) < 0$ が成り立つ．

(2) $f'(c) = 0$ をみたす実数 c が，$0 < c < 1$ の範囲にただ 1 つ存在する．

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ をみたす実数 x に対して，

$$ax + b(1-x) \geqq a^x b^{1-x}$$

が成り立つ．

2. $f(x) = x^3 - 3x + 1$，$g(x) = x^2 - 2$ とし，方程式 $f(x) = 0$ について考える．このとき，以下のことを示せ．(配点 30 点)

(1) $f(x) = 0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ．

(2) α が $f(x) = 0$ の解ならば，$g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解となる．

(3) $f(x) = 0$ の解を小さい順に α_1, α_2, α_3 とすれば，

$$g(\alpha_1) = \alpha_3, \quad g(\alpha_2) = \alpha_1, \quad g(\alpha_3) = \alpha_2$$

となる．

3. a を $0 \leqq a < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にある実数とする．2 つの直線 $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ および 2 つの曲線 $y = \cos(x - a)$，$y = -\cos x$ によって囲まれる図形を G とする．このとき，以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) 図形 G の面積を S とする．S を a を用いた式で表せ.

(2) a が $0 \leqq a < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，S を最大にするような a の値と，そのときの S の値を求めよ.

(3) 図形 G を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V とする．V を a を用いた式で表せ.

4. 大小 2 つのサイコロを同時に 1 回投げて，大きいサイコロの出た目の数 A，および小さいサイコロの出た目の数 B に応じて得点を競うゲームを考える．ただし，このゲームには 6 種類の得点 X_n $(1 \leqq n \leqq 6)$ があって，それぞれ，次の規則で定められているとする：

$$X_n = \begin{cases} A & (A \geqq n \text{ のとき}) \\ B & (A < n \text{ かつ } A \neq B \text{ のとき}) \\ aA + b & (A < n \text{ かつ } A = B \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここで，a，b は実数の定数である．また，得点 X_n の期待値を E_n とする．このとき，以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) A，B のとり得る値に対する得点 X_3 および X_4 の値を，答案用紙の表にそれぞれ記入せよ．

(2) $E_4 - E_3$ を求めよ．

(3) $E_1 = E_2 = \cdots = E_6$ となるような a，b はあるか．あれば求めよ．なければ，そのことを示せ．

5. t を実数として，数列 $a_1, a_2, \ldots$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2t,$$
$$a_{n+1} = 2ta_n - a_{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

で定める．このとき，以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $t \geqq 1$ ならば，$0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ となることを示せ.

(2) $t \leqq -1$ ならば，$0 < |a_1| < |a_2| < |a_3| < \cdots$ となることを示せ.

(3) $-1 < t < 1$ ならば，$t = \cos\theta$ となる θ を用いて，

$$a_n = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \qquad (n \geqq 1)$$

となることを示せ.