（2008 前）

数　　学

（理　科　系）

（1〜12 ページ）

- 白紙は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学（理科系）　　150 点

試験時間　120 分

1. 実数 x，y に関する次の各命題の真偽を答えよ．さらに，真である場合には証明し，偽である場合には反例をあげよ．(配点 30 点)

(1) $x > 0$ かつ $xy > 0$ ならば，$y > 0$ である．

(2) $x \geqq 0$ かつ $xy \geqq 0$ ならば，$y \geqq 0$ である．

(3) $x + y \geqq 0$ かつ $xy \geqq 0$ ならば，$y \geqq 0$ である．

2. xy 平面上に 3 点 A $(1,\ 0)$，B $(-1,\ 0)$，C $\left(0,\ \sqrt{3}\right)$ をとる．このとき，次の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) A，B の 2 点を中心とする同じ半径 r の 2 つの円が接する．このような r の値を求めよ．

(2) (1) で求めた r の値について，C を中心とする半径 r の円が，A，B の 2 点を中心とする半径 r の 2 つの円のどちらとも接することを示せ．

(3) A，B，C の 3 点を中心とする同じ半径 s の 3 つの円が直線 l に接する．このような s の値と直線 l の方程式をすべて求めよ．

3. 1からnまでの自然数$1, 2, 3, \cdots, n$の和をSとするとき，次の問に答えよ．(配点30点)

(1) nを4で割った余りが0または3ならば，Sが偶数であることを示せ．

(2) Sが偶数ならば，nを4で割った余りが0または3であることを示せ．

(3) Sが4の倍数ならば，nを8で割った余りが0または7であることを示せ．

4. xy 平面上に 5 点 A $(0,\ 2)$，B $(2,\ 2)$，C $(2,\ 1)$，D $(4,\ 1)$，P $(0,\ 3)$ をとる．点 P を通り傾き a の直線 l が，線分 BC と交わり，その交点は B，C と異なるとする．このとき，次の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) a の値の範囲を求めよ．

(2) 直線 l と線分 AB，線分 BC で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_1，直線 l と線分 BC，線分 CD で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_2 とするとき，それらの和 $V = V_1 + V_2$ を a の式で表せ．

(3) (1) で求めた a の値の範囲で，(2) で求めた V は，$a = -\dfrac{3}{4}$ のとき最小値をとることを示せ．

5. n，k を自然数とする．このとき，次の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $(1+x)^n$ の展開式を用いて，次の等式を示せ．

$$2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n$$
$$0 = {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n$$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$ を求めよ．

(3) 2 次の正方行列 M_1, M_2, M_3, $\cdots$, M_n は，それぞれが $\dfrac{1}{3}$ の確率で，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のいずれかになるとする．n 個の行列の積 $M_1M_2M_3\cdots M_n$ が $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と等しくなる確率を求めよ．