

(2007 前)

数 学

(理 科 系)

(1～12 ページ)

- 白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学 (理科系) 150 点

試験時間 120 分

1. 四面体 ABCD において、辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ O, P, Q, R とする。このとき、次の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OR}$ を用いて表せ。

(2) 辺 AC, BD 上にそれぞれ任意に点 E, F をとるとき、線分 EF の中点は 4 点 O, P, Q, R を含む平面上にあることを証明せよ。

2. xy 平面において, O を原点, P を第 1 象限内の点とする. このとき, 次の間に答えよ. (配点 30 点)

- (1) 2 点 O , P を頂点とし, y 軸上に底辺を持つ二等辺三角形を考える. この二等辺三角形の周の長さが常に 2 となるような点 P の軌跡 T の方程式を求めよ.
- (2) T を (1) で求めた軌跡とし, a を実数とする. このとき, 軌跡 T と直線 $y = a(x - 1)$ が第 1 象限内で交点をもつような, a の範囲を求めよ.

3. $f(x) = e^x - x$ について、次の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1) 実数 x について $f(x) \geq 1$ であることを示せ.
- (2) t は実数とする. このとき, 曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = t$, $x = t - 1$ および x 軸で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ.
- (3) $S(t)$ を最小にする t の値とその最小値を求めよ.

4.

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

で表される曲線を C とおく．このとき，次の問に答えよ．(配点 30 点)

- (1) y を x の式で表せ．
- (2) x 軸と C で囲まれる図形 D の面積を求めよ．
- (3) D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ．

5. 次の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) 1, 2, 3 の 3 種類の数字から重複を許して 3 つ選ぶ. 選ばれた数の和が 3 の倍数となる組合せをすべて求めよ.
- (2) 1 の数字を書いたカードを 3 枚, 2 の数字を書いたカードを 3 枚, 3 の数字を書いたカードを 3 枚, 計 9 枚用意する. この中から無作為に, 一度に 3 枚のカードを選んだとき, カードに書かれた数の和が 3 の倍数となる確率を求めよ.

