（2006 前）

数　　学

（理　科　系）

（1〜12 ページ）

- 白紙は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学（理科系）　　150 点

試験時間　120 分

1. 平面上に原点 O から出る，相異なる 2 本の半直線 OX，OY をとり，$\angle \mathrm{XOY} < 180^\circ$ とする．半直線 OX 上に O と異なる点 A を，半直線 OY 上に O と異なる点 B をとり，$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく．次の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) 点 C が $\angle \mathrm{XOY}$ の二等分線上にあるとき，ベクトル $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はある実数 t を用いて

$$\overrightarrow{c} = t\left(\frac{\overrightarrow{a}}{\left|\overrightarrow{a}\right|} + \frac{\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|}\right)$$

と表されることを示せ.

(2) $\angle \mathrm{XOY}$ の二等分線と $\angle \mathrm{XAB}$ の二等分線の交点を P とおくとき，$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ および 3 辺の長さ $\left|\overrightarrow{a}\right|$, $\left|\overrightarrow{b}\right|$, $\left|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right|$ を用いて表せ.

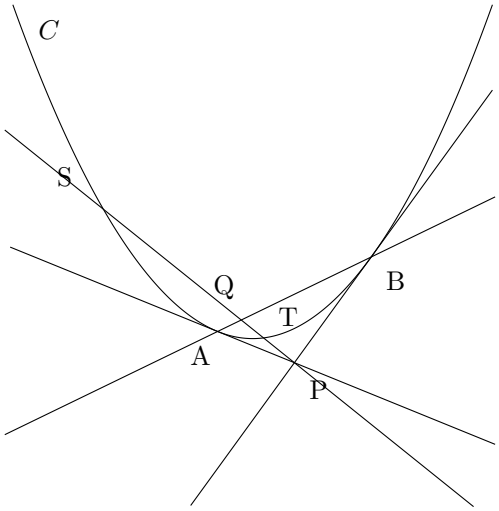
2. 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ と，実数 x，y，z，w を成分とする行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ を考える．次の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) X について関係式 $XA = AX$ が成立するための，x，y，z，w の条件を求めよ．

(2) X が $X^2 = A$ を満たすとき，$XA = AX$ が成立することを示せ．

(3) $X^2 = A$ を満たす行列 X をすべて求めよ．

3. xy 平面において放物線 $C : y = x^2$ と，その下側にある点 $\mathrm{P}\,(p,\ q)$ $(q < p^2)$ を考える．P を通るような C の 2 つの接線を考え，その接点をそれぞれ A，B とする．また，P を通る傾き m の直線が C と相異なる 2 点 S，T で交わるとする．



点 A，B の x 座標をそれぞれ a，b とし，点 S，T の x 座標をそれぞれ s，t とする．次の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $a + b$，ab を p，q で表せ．

(2) $s + t$，st を p，q，m で表せ．

(3) 直線 AB と直線 ST の交点を Q とし，Q の x 座標を u とする．上図のように $s < u < t < p$ となる場合について，等式

$$\frac{1}{\mathrm{PS}} + \frac{1}{\mathrm{PT}} = \frac{2}{\mathrm{PQ}}$$

が成立することを示せ．

4. xyz 空間に 3 点 $\mathrm{P}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(-1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{R}(-1,\ 1,\ 2)$ をとる．次の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) t を $0 < t < 2$ を満たす実数とするとき, 平面 $z = t$ と, $\triangle\mathrm{PQR}$ の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ.

(2) $\triangle\mathrm{PQR}$ を z 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ.

5. $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{7}\,i}{2}$ とする．ただし，i は虚数単位である．次の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) α を解にもつような 2 次方程式 $x^2+px+q=0$（p，q は実数）を求めよ．

(2) 整数 a，b，c を係数とする 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ について，解の 1 つは α であり，また $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に実数解を 1 つもつとする．このような整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．