

入学試験過去問題

数 学

神戸大学（理科系）

対象年度：2005 年

試験時間：120 分

問題数：5 問

第 1 問

O を原点とする空間の 3 点 A (1, 1, 1), B (1, 2, 0), C (0, 0, 1) がある.

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \left(\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|^2} \right) \overrightarrow{OA}$$

を満たす点を D とする. ただし, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を表す. 次の問に答えよ.

- (1) D の座標を求めよ.
- (2) 2 つの実数 s と t に対して, $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ を満たす点を P とする. t を固定して考えたとき, $|\overrightarrow{CP}|^2$ を最小にする s を t を用いて表せ.
- (3) $|\overrightarrow{CP}|^2$ を最小にする s と t の値を求めよ.
- (4) (3) で求めた s と t の値をそれぞれ s_0 と t_0 とする. s_0 と t_0 に対し, P_0 を $\overrightarrow{OP_0} = s_0\overrightarrow{OA} + t_0\overrightarrow{OB}$ を満たす点とする.

$$\overrightarrow{OP_0} = \left(\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}|^2} \right) \overrightarrow{OA} + \left(\frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}|^2} \right) \overrightarrow{OB}$$

となることを示せ.

第 2 問

a を正の実数とする. xy 平面の放物線 $C: y = x^2$ 上に点 $A(-a, a^2)$ をとる. $s > 0$ のとき, x 軸上の点 $P(s, 0)$ に対して, 直線 AP と C の 2 つの交点のうち, A とは異なる交点を $Q(t, t^2)$ とする. Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸の交点を $P'(t, 0)$ とする. いま, x 軸上の点 $P_1(c, 0)$ ($c > 0$) から出発して, 点 P に対して点 Q, P' を定めたのと同じ方法で P_1 から点 Q_1, P_2 を定め, 同様に P_2 から点 Q_2, P_3 を定め, この方法を繰り返して, $P_1, P_2, P_3, \dots$ と $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ を定める. 次の問に答えよ.

- (1) t を a と s を用いて表せ.
- (2) 点 P_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) の x 座標を x_n とする. 数列 $\{u_n\}$ を $u_n = \frac{1}{x_n}$ で定める. $\{u_n\}$ の一般項を求めよ.
- (3) 直角三角形 $P_n Q_n P_{n+1}$ の面積を S_n で表す. 自然数 r を選んで, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r S_n$ が正の実数値に収束するようにできる. このような r の値とそのときの極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r S_n$ を求めよ.

第 3 問

a を実数とし, $a > 1$ とする. 点 $P(1, a)$ を通り, 円 $C: x^2 + y^2 = 1$ と接する 2 本の直線のうち, $x = 1$ とは異なる直線を ℓ とする. ℓ と x 軸の交点を Q とする. 次の問に答えよ.

- (1) $A(1, 0)$ とする. 線分 QA の長さ L を a を用いて表せ.
- (2) 三角形 PQA の面積を S とする. a が $a > 1$ の範囲を動くとき, S の最小値とそのときの a の値を求めよ.

第 4 問

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \text{ または } x > 2 \text{ のとき} \\ |x - 1| & 0 \leq x \leq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める．次の問に答えよ．

(1) $g(x) = f(f(x))$ とおく．関数 $y = g(x)$ のグラフをかけ．

(2) n を自然数とする． $\int_0^{n^2} g\left(\frac{x - n^2 + n}{n}\right) \cos \frac{\pi x}{n} dx$ を求めよ．

第 5 問

A, B, C, D 4 つの袋の中にそれぞれ 6 枚のカードが入っている. それぞれのカードには 1 から 9 までの数字の 1 つが書かれている. A, B, C, D の袋の中のカードは次の 4 つの条件を満たしているとする.

- (i) 袋の中からカードを無作為に 1 枚抜いたとき, カードに書かれている数字の期待値は, A, B, C, D すべて同じである.
- (ii) $p(A, B) = p(B, C) = p(C, D) = p(D, A) = \frac{2}{3}$ である. ここで, $p(X, Y)$ は袋 X と袋 Y からそれぞれ 1 枚ずつカードを無作為に抜いたとき, X から抜いたカードに書かれている数字が Y から抜いたカードに書かれている数字より大きい確率を表す.
- (iii) A, B, C の袋の中のカードに書かれている数字はそれぞれ 2 種類で, D の袋の中のカードにはすべて同じ数字が書かれている.
- (iv) A の袋の中のカードに書かれている数字の種類は 3 と 9 である.

次の問に答えよ.

- (1) A の袋の中の 3 の書かれているカードの枚数と, D の袋の中のカードに書かれた数字を求めよ.
- (2) B の袋の中のカードに書かれている 2 種類の数字と, そのそれぞれの数字の書かれたカードの枚数を求めよ.
- (3) C の袋の中のカードに書かれている 2 種類の数字と, そのそれぞれの数字の書かれたカードの枚数を求めよ.