（2005 前）

数　　学

（理　科　系）

（1〜12 ページ）

- 白紙は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学（理科系）　　150 点

試験時間　120 分

1. O を原点とする空間の 3 点 A$(1,\ 1,\ 1)$，B$(1,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ がある．

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2} \right) \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

を満たす点を D とする．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積を表す．次の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) D の座標を求めよ．

(2) 2 つの実数 s と t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点を P とする．t を固定して考えたとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2$ を最小にする s を t を用いて表せ．

(3) $\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2$ を最小にする s と t の値を求めよ．

(4) (3) で求めた s と t の値をそれぞれ s_0 と t_0 とする．s_0 と t_0 に対し，P_0 を $\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = s_0\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t_0\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = \left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2} \right) \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|^2} \right) \overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

となることを示せ．

2. a を正の実数とする．xy 平面の放物線 $C : y = x^2$ 上に点 $\mathrm{A}\left(-a,\ a^2\right)$ をとる．$s > 0$ のとき，x 軸上の点 $\mathrm{P}\,(s,\ 0)$ に対して，直線 AP と C の 2 つの交点のうち，A とは異なる交点を $\mathrm{Q}\left(t,\ t^2\right)$ とする．Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸の交点を $\mathrm{P}'\,(t,\ 0)$ とする．いま，x 軸上の点 $\mathrm{P}_1\,(c,\ 0)\ (c > 0)$ から出発して，点 P に対して点 Q，P' を定めたのと同じ方法で P_1 から点 Q_1，P_2 を定め，同様に P_2 から点 Q_2，P_3 を定め，この方法を繰り返して，$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \cdots$ と $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_3, \cdots$ を定める．次の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) t を a と s を用いて表せ.

(2) 点 $\mathrm{P}_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ の x 座標を x_n とする．数列 $\{u_n\}$ を $u_n = \dfrac{1}{x_n}$ で定める．$\{u_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) 直角三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n で表す．自然数 r を選んで，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^r S_n$ が正の実数値に収束するようにできる．このような r の値とそのときの極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^r S_n$ を求めよ.

3. a を実数とし, $a > 1$ とする．点 $\mathrm{P}\,(1,\ a)$ を通り, 円 $C : x^2 + y^2 = 1$ と接する 2 本の直線のうち，$x = 1$ とは異なる直線を ℓ とする．ℓ と x 軸の交点を Q とする．次の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $\mathrm{A}\,(1,\ 0)$ とする．線分 QA の長さ L を a を用いて表せ.

(2) 三角形 PQA の面積を S とする．a が $a > 1$ の範囲を動くとき，S の最小値とそのときの a の値を求めよ.

4. 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \text{ または } x > 2 \text{ のとき} \\ |x-1| & 0 \leqq x \leqq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める．次の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $g(x) = f(f(x))$ とおく．関数 $y = g(x)$ のグラフをかけ．

(2) n を自然数とする．$\displaystyle\int_0^{n^2} g\left(\frac{x-n^2+n}{n}\right)\cos\frac{\pi x}{n}\,dx$ を求めよ．

5. A，B，C，D 4つの袋の中にそれぞれ6枚のカードが入っている．それぞれのカードには1から9までの数字の1つが書かれている．A，B，C，Dの袋の中のカードは次の4つの条件を満たしているとする．

(i) 袋の中からカードを無作為に1枚抜いたとき，カードに書かれている数字の期待値は，A，B，C，Dすべて同じである．

(ii) $p(\mathrm{A},\ \mathrm{B}) = p(\mathrm{B},\ \mathrm{C}) = p(\mathrm{C},\ \mathrm{D}) = p(\mathrm{D},\ \mathrm{A}) = \dfrac{2}{3}$ である．ここで，$p(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})$ は袋Xと袋Yからそれぞれ1枚ずつカードを無作為に抜いたとき，Xから抜いたカードに書かれている数字がYから抜いたカードに書かれている数字より大きい確率を表す．

(iii) A，B，Cの袋の中のカードに書かれている数字はそれぞれ2種類で，Dの袋の中のカードにはすべて同じ数字が書かれている．

(iv) Aの袋の中のカードに書かれている数字の種類は3と9である．

次の問に答えよ．(配点30点)

(1) Aの袋の中の3の書かれているカードの枚数と，Dの袋の中のカードに書かれた数字を求めよ．

(2) Bの袋の中のカードに書かれている2種類の数字と，そのそれぞれの数字の書かれたカードの枚数を求めよ．

(3) Cの袋の中のカードに書かれている2種類の数字と，そのそれぞれの数字の書かれたカードの枚数を求めよ．