

(2004 前)

数 学

(理 科 系)

(1～12 ページ)

- 白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学 (理科系) 150 点

試験時間 120 分

1. 行列 A, B, C を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

で定める．次の問に答えよ．(配点 30 点)

- (1) 積 ABC を計算せよ．
- (2) $BCAB = kB$ となる定数 k を求めよ．
- (3) 自然数 n に対して, $(ABC)^n$ を計算せよ．

2. $\alpha = \cos \frac{360^\circ}{5} + i \sin \frac{360^\circ}{5}$ とする. ただし, i は虚数単位である.
100 個の複素数 $z_1, z_2, \dots, z_{100}$ を

$$z_1 = \alpha, \quad z_n = z_{n-1}^3 \quad (n = 2, \dots, 100)$$

で定める. 次の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) z_5 を α を用いて表せ.
- (2) $z_n = \alpha$ となるような n の個数を求めよ.
- (3) $\sum_{n=1}^{100} z_n$ の値を求めよ.

3. a を正の定数とする. 不等式 $a^x \geq x$ が任意の正の実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ. (配点 30 点)

4. t を正の実数とし, k を自然数とする. 無限等比級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-kt(n-1)}$$

を考える. 次の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) 上の無限級数の和を $f_k(t)$ とするとき, それを t と k を用いて表せ.

(2) $x > 0$ のとき, $F_k(x) = \int_1^x f_k(t) dt$ を計算せよ.

(3) $x > 0$ のとき, $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x)$ を求めよ.

5. 次のようなゲームを考える．下のように1から9の数字が書かれている表を用意する．

5	2	8
1	9	3
7	4	6

一方，9枚のカードがあり1から9までの数字が1つずつ書かれている．これらのカードをよくまぜ，順に並べる．カードを並べた順に見て，カードに書いてある数字を表から消し，かわりに*印を書き込む．この表で縦，横あるいは斜めのいずれかに*印が3つはじめて並んだ時，その時点で表にある*印の個数を得点とする．例えば，最初の4枚のカードが，順に5, 4, 6, 9であれば，以下のように変化する．

*	2	8
1	9	3
7	4	6

*	2	8
1	9	3
7	*	6

*	2	8
1	9	3
7	*	*

*	2	8
1	*	3
7	*	*

その結果，*印がはじめて3つ並んだ．このとき，得点は4である．次の問に答えよ．(配点30点)

- (1) このゲームで起こり得る最小の得点を求めよ．また，得点が最小となる確率を求めよ．
- (2) このゲームで起こり得る最大の得点を求めよ．また，得点が最大となる確率を求めよ．

