

(2003 前)

数 学

(理 科 系)

(1～12 ページ)

- 白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学 (理科系) 150 点

試験時間 120 分

1. 次の問に答えよ. ただし, i は虚数単位とする. (配点 30 点)

- (1) 複素数 z に対し, $w = \frac{z-i}{z+i}$ とする. z が実軸上を動くとき, 複素数平面上で w を表す点が描く図形を求めよ.
- (2) 複素数 z とその共役複素数 $\bar{z}$ に対し, $w_1 = \frac{z-i}{z+i}$, $w_2 = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$ とする. $z \neq \pm i$ のとき, 複素数平面上で w_1 を表す点を P, w_2 を表す点を Q とする. P, Q と原点 O が同一直線上にあることを示せ.

2. 三角形 ABC があり, $AB = 2$, $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, $\angle CAB > \frac{\pi}{4}$ とする. 点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とし, $\angle CAH = \alpha$ とする. 辺 AB の中点を M とする. 線分 AM 上に A と異なる点 X をとる. 3 点 A, X, H を通る円の中心を P , 半径を r , $\angle PAH = \theta$ とする. この円と直線 AC との交点で, A と異なる点を Y とする. 次の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) $\cos \theta$ を r を用いて表せ.
- (2) $AX + AY$ を r と α を用いて表せ.
- (3) X のとり方によらず, $AX + AY$ が常に一定の値になるときの α の値を求めよ.

3. 関数 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{4}|x|}}{x^2 - 3x + 18}$ とする. 次の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) $f(x)$ の極小値をすべて求めよ.
- (2) $f(x)$ の最小値を求めよ. ただし, 必要ならば $e > 2.7$ を用いてよい.

4. $f(x)$ は実数全体で定義された何回でも微分可能な関数で, $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$ をみたすとする. 次の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) $\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = - \int_0^\pi f''(x) \sin x \, dx$ を示せ.

(2) $f(x) = x(x - \pi)$ のとき, 実数 a に対し

$$F(a) = \int_0^\pi \{af(x) - \sin x\}^2 \, dx$$

とする. a を変化させたとき, $F(a)$ を最小にする a の値を求めよ.

5. 座標平面上の点 (p, q) で, p と q がともに整数であるものを格子点という. 次の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) 自然数 n に対し, $p + 2q = n$, $p > 0$, $q > 0$ をみたす格子点 (p, q) の個数を a_n とする. a_n を求めよ.

(2) 自然数 n に対し, $p + 2q < n$, $p > 0$, $q > 0$ をみたす格子点 (p, q) の個数を b_n とする. b_n を求めよ.

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2}$ を求めよ.

