

(2002 前)

数 学

(理 科 系)

(1～12 ページ)

- 白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学 (理科系) 150 点

試験時間 120 分

1. 0でない複素数 z に対して, $w = u + iv$ を

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

とするとき, 次の問に答えよ. ただし, u, v は実数, i は虚数単位である. (配点 30 点)

- (1) 複素数平面上で, z が単位円 $|z| = 1$ 上を動くとき, w はどのような曲線を描くか. u, v がみたす曲線の方程式を求め, その曲線を図示せよ.
- (2) 複素数平面上で, z が実軸からの偏角 α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ の半直線上を動くとき, w はどのような曲線を描くか. u, v がみたす曲線の方程式を求め, その曲線を図示せよ.

2. 正の整数 n に対して, 連立不等式

$$\begin{cases} 0 < x \leq n \\ x \leq y \leq 3x \end{cases}$$

の表す領域を D_n とする. 次の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) 領域 D_n 内にある格子点 $P(x, y)$ の個数を S_n とする. S_n を n で表せ. ただし, 格子点とは x 座標と y 座標の両方が整数であるような点のことである.

(2) 原点 $O(0, 0)$ を始点とし, 領域 D_n 内の格子点 $P(x, y)$ を終点とする位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ は, ベクトル

$$\overrightarrow{v_1} = (1, 1), \quad \overrightarrow{v_2} = (1, 2), \quad \overrightarrow{v_3} = (1, 3)$$

と 0 以上の整数 m_1, m_2, m_3 を用いて,

$$\overrightarrow{OP} = m_1 \overrightarrow{v_1} + m_2 \overrightarrow{v_2} + m_3 \overrightarrow{v_3}$$

と表せることを証明せよ.

3. 正の実数 a, b に対して, 2つの曲線

$$C_1 : ay^2 = x^3 \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

$$C_2 : bx^2 = y^3 \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

の原点 O 以外の交点を P とする. 次の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) 交点 P の座標を求め, 2つの曲線 C_1, C_2 の概形を描け.
- (2) 2つの曲線 C_1, C_2 で囲まれる部分の面積を, a と b で表せ. また, この面積が一定値 S であるように a, b が動くとき, 点 P の軌跡の方程式を求めよ.

4. 関数 $f(x)$ は任意の実数 x に対して定義されているとする. 次の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) $f(x)$ が $x = a$ において微分可能であることの定義を述べよ.
- (2) 次の 2 つの命題のうち正しいものを選び, それが正しい理由を示せ.
 - (i) $f(x)$ が $x = a$ において連続ならば, 必ず, $f(x)$ は $x = a$ において微分可能である.
 - (ii) $f(x)$ が $x = a$ において連続であっても, $f(x)$ は $x = a$ において微分可能であるとは限らない.
- (3) 関数 $f(x) = \cos x$ が $x = a$ において微分可能であることを, (1) で答えた定義を用いて証明せよ.

5. 数字 $1, 2, \dots, N$ の書かれたカードが1枚ずつ N 枚入っている箱から、元に戻さずに1枚ずつ k 枚のカードを引く試行を考える. ここで、 $2 \leq k \leq N$ とする. 引いたカードの順に、書かれている数字を $x_1, x_2, \dots, x_k$ とする. 次の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) $x_1 < x_2 < \dots < x_k$, すなわち、 k 枚のカードを数字の小さい順に引く確率 p を求めよ.

(2) i は整数で、 $2 \leq i \leq k$ をみたすとする.

$$\begin{cases} x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} \\ x_{i-1} > x_i \end{cases}$$

である確率, すなわち、 k 枚のカードのうち $i - 1$ 枚目までは小さい順にカードを引き、 i 枚目に初めて $i - 1$ 枚目よりも数字の小さいカードを引く確率 q_i を求めよ.

(3) N は5以上の整数で、 $k = 5$ とする. $2 \leq i \leq 5$ をみたす各整数 i について上の (2) の事象が起こるとき、得点 i 点が与えられるとする. それ以外のときの得点は0点とする. このとき、得点の期待値を求めよ.

