

(2001 前)

数 学

(理 科 系)

(1～12 ページ)

- 白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学 (理科系) 150 点

試験時間 120 分

1. 行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} k & 4 \\ -1 & k-4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

とする. 次の問に答えよ. (配点 30 点)

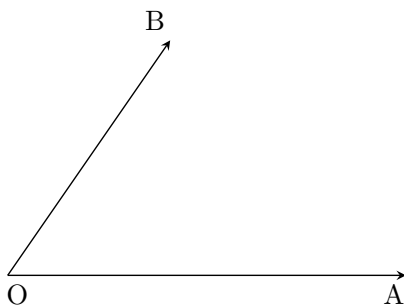
(1) A の逆行列が存在しないような k の値を求めよ.

(2) A の逆行列が存在するとき, $AX = B$ となる $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ を
 a, b, k を用いて表わせ.

(3) A の逆行列が存在しないとき, $AX = B$ をみたす行列 X があるような a, b の値を求めよ.

2. 3点 O, A, B は、一直線上にない点とし、 $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ とする．また、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく．このとき次の問に答えよ．(配点 30 点)

- (1) 点 P を $\overrightarrow{BP} = t\overrightarrow{BC}$ (t は実数) をみたす点とする．このとき、 $\overrightarrow{OP}$ を、 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 t であらわせ．
- (2) 点 Q を $\overrightarrow{OQ} = 2s\overrightarrow{OA}$ (s は実数) をみたす点とする． P と Q の中点を M とする． t, s が $0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq 1$ をみたしながら変化するとき、点 M の存在する範囲を図示せよ．



3. 次の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) a, b, c を整数とする. x に関する 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ が有理数の解をもつならば, その解は整数であることを示せ. ただし, 正の有理数は 1 以外の公約数をもたない 2 つの自然数 m, n を用いて $\frac{n}{m}$ と表せることを用いよ.
- (2) 方程式 $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$ は, 有理数の解をもたないことを背理法を用いて示せ.

4. 関数

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{\log x}{x} \quad (x > 0)$$

を考える．次の問に答えよ．ただし， e は自然対数 $\log x$ の底である．(配点 30 点)

- (1) $f(x)$ の極値と変曲点を求め，グラフの概形を描け．ここで $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてよい．また，グラフと座標軸との交点の座標は求めなくてよい．
- (2) 定積分 $\int_{\frac{1}{e}}^e f(x) dx$ の値を求めよ．

5. 白球 3 個, 赤球 2 個, 青球 1 個 合計 6 個の球の入っている袋がある. 最初に A 君が, 次のルール (i), (ii) に従って袋から球を 1 個または 2 個取り出す. 次に B 君が同じルールに従って, 袋に残った球を 1 個または 2 個取り出す. ただし, いったん取り出した球は元の袋には戻さないものとする.

(i) 取り出した 1 個目が赤球ならば, 2 個目を取り出すことはできない.

(ii) 取り出した 1 個目が赤球以外ならば, さらに 1 個だけ取り出す.

白球は 1 点, 赤球は 2 点, 青球は 3 点とし, 取り出した球の合計点を各自の得点とする. このとき次の間に答えよ. (配点 30 点)

(1) A 君と B 君の得点が同じになる確率 p_1 を求めよ.

(2) A 君の得点が B 君の得点より大きくなる確率 p_2 を求めよ.

